

Método de Elementos Finitos

Pedro H A Konzen

7 de abril de 2024

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

O site [notaspedrok.com.br](https://www.notaspedrok.com.br) é uma plataforma que construí para o compartilhamento de minhas notas de aula. Essas anotações feitas como preparação de aulas é uma prática comum de professoras/es. Muitas vezes feitas a rabiscos em rascunhos com validade tão curta quanto o momento em que são concebidas, outras vezes, com capricho de um diário guardado a sete chaves. Notas de aula também são feitas por estudantes - são anotações, fotos, prints, entre outras formas de registros de partes dessas mesmas aulas. Essa dispersão de material didático sempre me intrigou e foi o que me motivou a iniciar o site.

Com início em 2018, o site contava com apenas três notas incipientes. De lá para cá, conforme fui expandido e revisando os materiais, o site foi ganhando acessos de vários locais do mundo, em especial, de países de língua portuguesa. No momento, conta com 13 notas de aula, além de minicursos e uma coleção de vídeos e áudios.

As notas de **Métodos de Elementos Finitos** abordam tópicos introdutórios sobre o método de elementos finitos para equações diferenciais. Códigos exemplos são trabalhos em linguagem [Python](#) com a ajuda do pacote computacional [FEniCSx](#).

Aproveito para agradecer a todas/os que de forma assídua ou esporádica contribuem com correções, sugestões e críticas! ;)

Pedro H A Konzen

<https://www.notaspedrok.com.br>

Conteúdo

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	v
1 Problemas Unidimensionais	1
1.1 Interpolação e Projeção	1
1.1.1 Interpolação	4
1.1.2 Projeção L^2	8
1.1.3 Exercícios	12
1.2 Problema Modelo	12
1.2.1 Formulação Fraca	13
1.2.2 Formulação de Elementos Finitos	14
1.2.3 Estimativa <i>a Priori</i>	17
1.2.4 Estimativa <i>a Posteriori</i>	21
1.2.5 Exercícios	22
1.3 Condições de Contorno	23
1.3.1 Condições de Dirichlet	23
1.3.2 Condições de Neumann	26
1.3.3 Condições de Robin	31
1.3.4 Exercícios	34
1.4 Malhas Auto-Adaptativas	35
1.4.1 Exercícios	39
1.5 Aplicação: EDP Evolutiva	39

1.5.1	Discretização do Tempo	39
1.5.2	Formulação de Elementos Finitos	40
1.5.3	Exercícios	44
1.6	Aplicação: EDP de Advecção-Difusão	44
1.6.1	Exercícios	44
1.7	Aplicação: EDP Não-Linear	44
1.7.1	Discretização do Tempo	44
1.7.2	Formulação de Elementos Finitos	45
1.7.3	Exercícios	48
1.8	Seleção de Aplicações	49
1.8.1	Sistemas de Equações	49
1.8.2	Exercícios	52
2	Problemas Bidimensionais	53
2.1	Malha e Espaço	53
2.1.1	Malha	53
2.1.2	Espaço de Polinômios Lineares	55
2.1.3	Espaço contínuo dos polinômios lineares por partes	56
2.1.4	Exercícios	58
2.2	Interpolação	59
2.2.1	Exercícios	66
2.3	Projeção	66
2.3.1	Exercícios	68
2.4	Problema Modelo	69
2.4.1	Formulação Fraca	69
2.4.2	Formulação de Elementos Finitos	70
2.4.3	Exercícios	73
2.5	Fundamentos da análise de elementos finitos	74
2.5.1	Existência e unicidade	74
2.5.2	Estimativa <i>a priori</i> do erro	75
2.5.3	Estimativa <i>a posteriori</i>	80
	Bibliografia	83

Capítulo 1

Problemas Unidimensionais

1.1 Interpolação e Projeção

Seja dado um intervalo $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$, $x_0 \neq x_1$. O **espaço vetorial das funções lineares** em I é definido por

$$P_1(I) := \{v : v(x) = c_0 + c_1x, x \in I, c_0, c_1 \in \mathbb{R}\}. \quad (1.1)$$

Observamos que dado $v \in P_1(I)$, temos que v é unicamente determinada pelos valores

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= v(x_0), \\ \alpha_1 &= v(x_1). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Como consequência, existe exatamente uma única função $v \in P_1(I)$ para quaisquer dados valores α_0 e α_1 . Desta observação, introduzimos a chamada **base nodal** (base lagrangiana¹) $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ para $P_1(I)$, definida por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \quad (1.3)$$

com $i, j = 0, 1$. Consulte a Figura 1.1.

¹Consulte mais em [Notas de Aula: Matemática Numérica I: Interpolação de Lagrange](#).

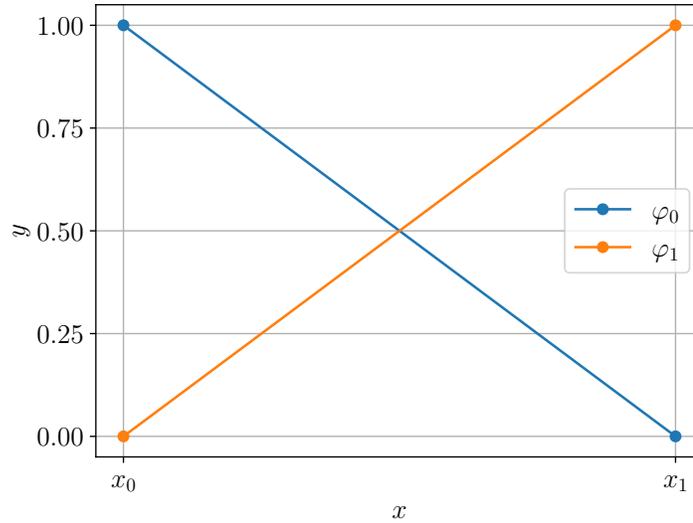


Figura 1.1: Base nodal para o espaço $P_1([x_0, x_1])$.

Com esta base, toda função $v \in P_1(I)$ pode ser escrita como uma combinação linear das funções φ_0 e φ_1 com coeficientes α_0 e α_1 (**graus de liberdade**), i.e.

$$v(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x). \quad (1.4)$$

Além disso, observamos que

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad (1.5)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (1.6)$$

Uma extensão do espaço $P_1(I)$ é o **espaço das funções lineares por partes**. Dado $I = [l_0, l_1]$, $l_0 \neq l_1$, consideramos uma partição (**malha**) de I com $n + 1$ pontos

$$\mathcal{I} = \{l_0 = x_0, x_1, \dots, x_n = l_1\} \quad (1.7)$$

e, portanto, com n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de comprimento (**tamanho da malha**) $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Na malha \mathcal{I} definimos o seguinte **espaço das funções lineares por partes**

$$V_h := \{v : v \in C^0(\mathcal{I}), v|_{I_i} \in P_1(I_i), i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (1.8)$$

Observamos que toda função $v \in V_h$ é unicamente determinada por seus valores nodais $\{\alpha_i = v(x_i)\}_{i=0}^n$. Reciprocamente, todo conjunto de valores nodais $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ determina unicamente uma função $v \in V_h$. Desta observação, temos que os **valores nodais determinam os graus de liberdade** com a base nodal $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$ para V_h definida por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \quad (1.9)$$

com $i, j = 0, 1, \dots, n$. Ou seja, temos que

$$v(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \phi_j(x). \quad (1.10)$$

Podemos verificar que

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & , x \in I_i, \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & , x \in I_{i+1}, \\ 0 & , \text{noutros casos} \end{cases} \quad (1.11)$$

consulte, Figura 1.2. É notável que $\varphi_i(x)$ tem suporte compacto $I_i \cup I_{i+1}$.

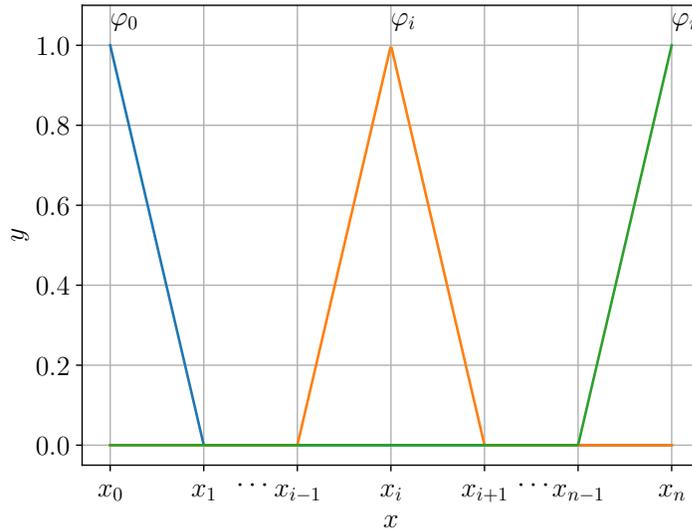


Figura 1.2: Base nodal para o espaço das funções lineares por parte.

1.1.1 Interpolação

Em revisão

Interpolação é uma técnica de aproximação de funções. Dada uma função contínua f em $I = [l_0, l_1]$, definimos o **operador de interpolação linear** $\pi : C^0(I) \rightarrow V_h$ por

$$\pi f(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \varphi_j(x) \quad (1.12)$$

Observamos que πf é igual a f nos nodos x_j , $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 1.1.1. A Figura 1.3 ilustra a interpolação da função $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço de elementos finitos V_h das funções lineares por partes com 5 células.

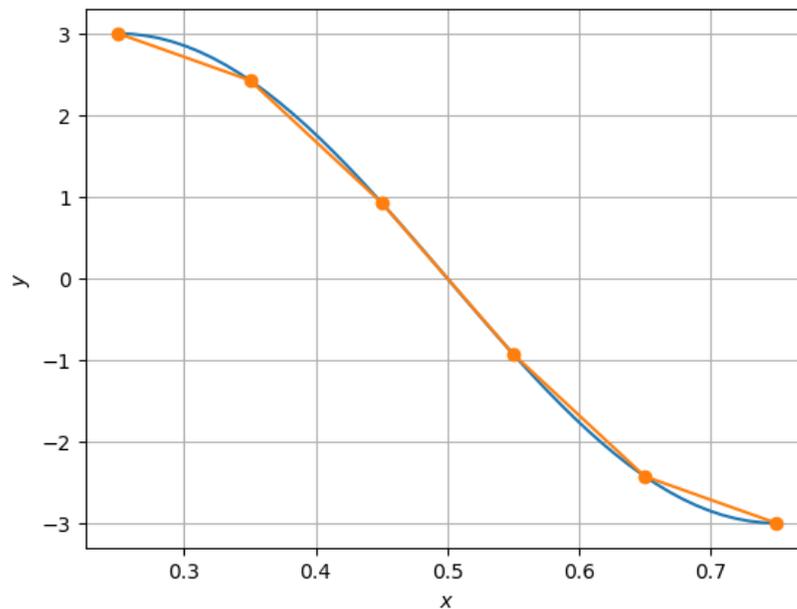


Figura 1.3: Interpolação linear de $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço de elementos finitos V .

Código 1.1: mefld_interp_lin

```
1 from dolfinx import fem, mesh
```

```

2 import ufl
3 import numpy as np
4 from mpi4py import MPI
5 import matplotlib.pyplot as plt
6
7 # malha
8 l0 = 0.25
9 l1 = 0.75
10 domain = mesh.create_interval(MPI.COMM_WORLD,
11                               nx = 5,
12                               points = [l0, l1])
13 x = ufl.SpatialCoordinate(domain)
14
15 # espaço
16 V = fem.FunctionSpace(domain, ('P', 1))
17
18 # fun
19 def fun(x, mod):
20     return 3.*mod.sin(2.*mod.pi*x)
21
22 x = ufl.SpatialCoordinate(domain)
23 f_expr = fem.Expression(fun(x[0], ufl),
24                          V.element.
25                          interpolation_points())
26 # interpolação
27 pif = fem.Function(V)
28 pif.interpolate(f_expr)

```

Agora, vamos buscar medir o erro de interpolação, i.e. $f - \pi f$. Para tanto, podemos usar a norma L^2 definida por

$$\|v\|_{L^2(I)} = \left(\int_I v^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.13)$$

Lembramos que valem a **desigualdade triangular**

$$\|v + w\|_{L^2(I)} \leq \|v\|_{L^2(I)} + \|w\|_{L^2(I)} \quad (1.14)$$

e a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**²

$$\int_I vw \, dx \leq \|v\|_{L^2(I)} \|w\|_{L^2(I)}, \quad (1.15)$$

para qualquer funções $v, w \in L^2(I)$.

Proposição 1.1.1. (Erro da interpolação linear) O interpolador $\pi f : C^0(I) \rightarrow P_1(I)$ satisfaz as estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2 \|f''\|_{L^2(I)}, \quad (1.16)$$

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} \leq Ch \|f''\|_{L^2(I)}, \quad (1.17)$$

onde C é uma constante e $h = x_1 - x_0$.

Demonstração. Denotemos o erro de interpolação por $e = f - \pi f$. Do teorema fundamental do cálculo, temos

$$e(y) = e(x_0) + \int_{x_0}^y e'(x) \, dx, \quad (1.18)$$

onde $e(x_0) = f(x_0) - \pi f(x_0) = 0$. Daí, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.15), temos

$$e(y) = \int_{x_0}^y e' \, dx \quad (1.19)$$

$$\leq \int_{x_0}^y |e'| \, dx \quad (1.20)$$

$$\leq \int_I 1 \cdot |e'| \, dx \quad (1.21)$$

$$\leq \left(\int_I 1^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_I e'^2 \, dx \right)^{1/2} \quad (1.22)$$

$$= h^{1/2} \left(\int_I e'^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad (1.23)$$

donde

$$e(y)^2 \leq h \int_I e'^2 \, dx = h \|e'\|_{L^2(I)}^2. \quad (1.24)$$

²Também conhecida como desigualdade de Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz. Augustin-Louis Cauchy, 1789 - 1857, matemático francês. Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, 1804 - 1889, matemático Russo. Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843 - 1921, matemático alemão.

Então, integrando em I obtemos

$$\|e\|_{L^2(I)}^2 = \int_I e^2(y) dy \leq \int_I h \|e'\|_{L^2(I)}^2 dy = h^2 \|e'\|_{L^2(I)}^2, \quad (1.25)$$

ou seja, temos a seguinte desigualdade

$$\|e\|_{L^2(I)} \leq h \|e'\|_{L^2(I)}. \quad (1.26)$$

Agora, observando que $e(x_0) = e(x_1) = 0$, o **teorema de Rolle**³ garante a existência de um ponto $\tilde{x} \in I$ tal que $e'(\tilde{x}) = 0$, donde do teorema fundamental do cálculo e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue

$$e'(y) = e'(\tilde{x}) + \int_{\tilde{x}}^y e'' dx \quad (1.27)$$

$$= \int_{\tilde{x}}^y e'' dx \quad (1.28)$$

$$\leq \int_I 1 \cdot |e''| dx \quad (1.29)$$

$$\leq h^{1/2} \left(\int_I e''^2 \right)^{1/2}. \quad (1.30)$$

Então, integrando em I , obtemos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 \leq h^2 \|e''\|_{L^2(I)}^2, \quad (1.31)$$

a qual, observando que $e'' = f''$, equivale a segunda estimativa procurada, i.e.

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} \leq Ch \|f''\|_{L^2(I)}. \quad (1.32)$$

Por fim, de (1.31) e de (1.26), obtemos a primeira estimativa desejada

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2 \|f''\|_{L^2(I)}. \quad (1.33)$$

□

Vamos, agora, generalizar o resultado da Proposição 1.1.1 para a interpolação no espaço V_h das funções lineares por parte.

O seguinte resultado fornece uma estimativa do erro de interpolação em relação ao tamanho h_i de cada elemento da malha.

³Michel Rolle, 1652 - 1719, matemático francês.

Proposição 1.1.2. *O interpolador πf satisfaz as estimativas*

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^4 \|f''\|_{L^2(I)}^2, \quad (1.34)$$

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^2 \|f''\|_{L^2(I)}^2. \quad (1.35)$$

$$(1.36)$$

Demonstração. Ambas desigualdades seguem da desigualdade triangular e da Proposição 1.1.1. Por exemplo, para a primeira desigualdade, temos

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)}^2 \leq \sum_{i=1}^n \|f - \pi f\|_{L^2(I_i)}^2 \quad (1.37)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n C h_i^4 \|f''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.38)$$

□

1.1.2 Projeção L^2

Em revisão

Dada uma função $f \in L^2(I)$, definimos o **operador de projeção L^2** $P_h : L^2(I) \rightarrow V_h$ por

$$\int_I (f - P_h f) v \, dx = 0, \quad \forall v \in V_h. \quad (1.39)$$

Como V_h é um espaço de dimensão finita, a condição (1.39) é equivalente a

$$\int_I (f - P_h f) \varphi_i \, dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1.40)$$

onde φ_i é a i -ésima função base de V_h . Além disso, como $P_h f \in V_h$, temos

$$P_h f = \sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j, \quad (1.41)$$

onde ξ_j , $j = 0, 1, \dots, n$, são $n + 1$ incógnitas a determinar. Logo,

$$\int_I (f - P_h f) \varphi_i dx = 0 \quad (1.42)$$

$$\int_I f \varphi_i dx = \int_I P_h f \varphi_i dx \quad (1.43)$$

$$\int_I f \varphi_i dx = \int_I \left(\sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j \right) \varphi_i dx \quad (1.44)$$

$$\sum_{j=0}^n \xi_j \int_I \varphi_j \varphi_i dx = \int_I f \varphi_i dx, \quad (1.45)$$

para $i = 0, 1, \dots, n$.

Observamos que (1.45) consiste em um sistema de $n + 1$ equações lineares para as $n + 1$ incógnitas ξ_j , $j = 0, 1, \dots, n$. Este, por sua vez, pode ser escrito na seguinte forma matricial

$$M\xi = b, \quad (1.46)$$

onde $M = [m_{i,j}]_{i,j=0}^{n+1}$ é chamada de **matriz de massa**

$$m_{i,j} = \int_I \varphi_j \varphi_i dx \quad (1.47)$$

e $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ é chamado de **vetor de carregamento**

$$b_i = \int_I f \varphi_i dx. \quad (1.48)$$

Ou seja, a projeção L^2 de f no espaço V_h é

$$P_h f = \sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j, \quad (1.49)$$

onde $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ é solução do sistema (1.46).

Exemplo 1.1.2. A Figura 1.4 ilustra a projeção L^2 da função $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes em uma malha uniforme do intervalo $I = [1/4, 3/4]$ com $n = 4$ subintervalos (5 células).

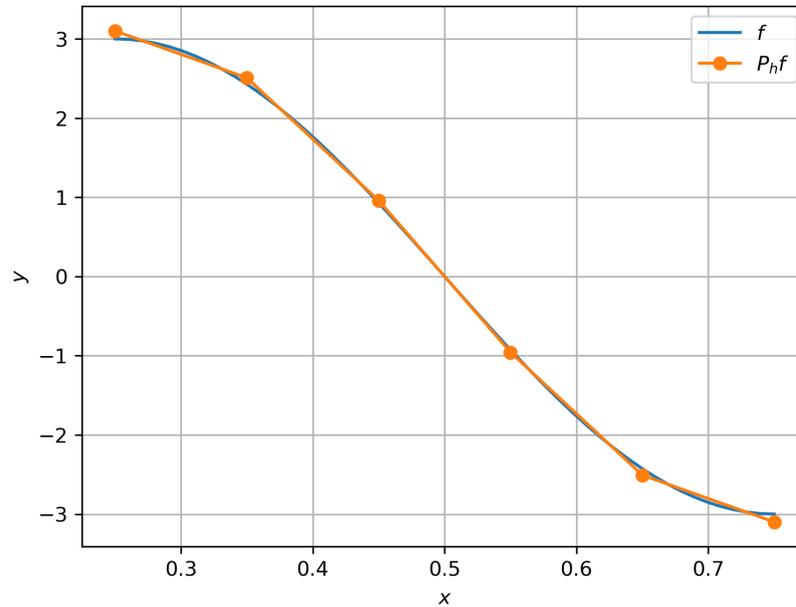


Figura 1.4: Projeção L^2 de $f(x) = 3\text{sen}(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes sobre uma malha com 5 células.

Código 1.2: ex_mefld_proj.py

```

1 from dolfinx import fem, mesh
2 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
3 import ufl
4 from mpi4py import MPI
5
6 # malha
7 l0 = 0.25
8 l1 = 0.75
9 domain = mesh.create_interval(MPI.COMM_WORLD,
10                               nx=5,
11                               points=[l0, l1])
12 x = ufl.SpatialCoordinate(domain)
13
14 # espaço
15 V = fem.functionspace(domain, ("P", 1))
16

```

```

17 # fun
18 f = 3.*ufl.sin(2.*ufl.pi*x[0])
19
20 # project f
21 u = ufl.TrialFunction(V)
22 v = ufl.TestFunction(V)
23 a = ufl.dot(u, v) * ufl.dx
24 L = ufl.dot(f, v) * ufl.dx
25 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[])
26 Phf = problem.solve()

```

O próximo teorema mostra que $P_h f$ é a função que melhor aproxima f dentre todas as funções do espaço V_h .

Teorema 1.1.1. (A melhor aproximação.) A projeção L^2 satisfaz

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)} \leq \|f - v\|_{L^2(I)}, \quad \forall v \in V_h. \quad (1.50)$$

Demonstração. Dado $v \in V_h$, temos

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)}^2 = \int_I |f - P_h f|^2 dx \quad (1.51)$$

$$= \int_I (f - P_h f)(f - v + v - P_h f) dx \quad (1.52)$$

$$= \int_I (f - P_h f)(f - v) dx + \int_I (f - P_h f)(v - P_h f) dx \quad (1.53)$$

$$= \int_I (f - P_h f)(f - v) dx \quad (1.54)$$

$$\leq \|f - P_h f\|_{L^2(I)} \|f - v\|_{L^2(I)}, \quad (1.55)$$

donde segue o resultado. \square

O próximo teorema fornece uma estimativa *a-priori* do erro $\|f - P_h f\|_{L^2(I)}$ em relação ao tamanho da malha.

Teorema 1.1.2. A projeção L^2 satisfaz

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^4 \|f''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.56)$$

Demonstração. Tomando a interpolação $\pi f \in V_h$, temos do Teorema da melhor aproximação (Teorema 1.1.1) e da estimativa do erro de interpolação (Proposição 1.1.2) que

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)}^2 \leq \|f - \pi f\|_{L^2(I)}^2 \quad (1.57)$$

$$\leq C \sum_{i=1}^n h_i^4 \|f''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.58)$$

□

1.1.3 Exercícios

Em revisão

E.1.1.1. Faça um código para verificar a segunda estimativa da Proposição 1.1.1 no caso da interpolação da função $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço P_1 das funções lineares.

E.1.1.2. Faça um código para verificar as estimativas da Proposição 1.1.2 no caso da interpolação da função $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes.

E.1.1.3. Faça um código para computar a projeção L^2 $P_h f$ da função $f(x) = x - \cos(x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes em uma malha com 10 células no intervalo $I = [0, \pi]$. Faça o esboço dos gráficos de f e $P_h f$ e compute o erro $\|f - P_h f\|_{L^2(I)}$.

Respostas

E.1.1.1. badgeConstrucao

1.2 Problema Modelo

Em revisão

Nesta seção, discutimos sobre a aplicação do método de elementos finitos para o seguinte problema de valor de contorno: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L], \quad (1.59)$$

$$u(0) = u(L) = 0, \quad (1.60)$$

onde f é uma função dada.

1.2.1 Formulação Fraca

Em revisão

A derivação de um método de elementos finitos inicia-se da formulação fraca do problema em um espaço de funções apropriado. No caso do problema (1.59)-(1.60), tomamos o espaço

$$V_0 = \{v \in H^1(I) : v(0) = v(L) = 0\}. \quad (1.61)$$

Ou seja, se $v \in H^1(I)$, então $\|v\|_{L^2(I)} < \infty$, $\|v'\|_{L^2(I)} < \infty$, bem como v satisfaz as condições de contorno do problema.

A formulação fraca é, então, obtida multiplicando-se a equação (1.59) por uma função teste $v \in V_0$ (arbitrária) e integrando-se por partes, i.e.

$$\int_I f v \, dx = - \int_I u'' v \, dx \quad (1.62)$$

$$= \int_I u' v' \, dx - u'(L)v(L) + u'(0)v(0) \quad (1.63)$$

$$(1.64)$$

Donde, das condições de contorno, temos

$$\int_I u' v' \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.65)$$

Desta forma, o problema fraco associado a (1.59)-(1.60) lê-se: encontrar $u \in V_0$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad (1.66)$$

onde

$$a(u, v) = \int_I u' v' \, dx \quad (1.67)$$

$$L(v) = \int_I f v \, dx, \quad (1.68)$$

são chamadas de forma bilinear e forma linear, respectivamente.

1.2.2 Formulação de Elementos Finitos

Em revisão

Uma formulação de elementos finitos é um aproximação do problema fraco (1.66) em um espaço de dimensão finita. Aqui, vamos usar o espaço $V_{h,0}$ das funções lineares por partes em I que satisfazem as condições de contorno, i.e.

$$V_{h,0} = \{v \in V_h : v(0) = v(L) = 0\}. \quad (1.69)$$

Então, substituindo o espaço V_0 pelo subespaço $V_{h,0} \subset V_0$ em (1.66), obtemos o seguinte problema de elementos finitos: encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in V_{h,0}. \quad (1.70)$$

Observação 1.2.1. A formulação de elementos finitos não é única, podendo-se trabalhar com outros espaços de funções. No caso em que o espaço da solução é igual ao espaço das funções testes, a abordagem é chamada de método de Galerkin⁴.

Observemos que o problema (1.70) é equivalente a: encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (1.71)$$

onde φ_i , $i = 1, \dots, n-1$, são as funções base de $V_{h,0}$. Então, como $u_h \in V_{h,0}$, temos

$$u_h = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \varphi_j, \quad (1.72)$$

onde ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n-1$, são incógnitas a determinar. I.e., ao computarmos ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n-1$, temos obtido a solução u_h do problema de elementos finitos 1.70.

⁴Boris Grigoryevich Galerkin, matemático e engenheiro soviético. Fonte: [Wikipédia](#).

Agora, da forma bilinear (1.67), temos

$$a(u_h, \varphi_i) = a\left(\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \varphi_j, \varphi_i\right) \quad (1.73)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i). \quad (1.74)$$

Daí, o problema (1.70) é equivalente a resolvermos o seguinte sistema de equações lineares

$$A\xi = b, \quad (1.75)$$

onde $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{n-1}$ é a matriz de rigidez com

$$a_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_I \varphi_j' \varphi_i' dx, \quad (1.76)$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ é o vetor das incógnitas e $b = (b_i)_{i=1}^{n-1}$ é o vetor de carregamento com

$$b_i = L(\varphi_i) = \int_I f \varphi_i dx. \quad (1.77)$$

Exemplo 1.2.1. Consideramos o problema (1.59)-(1.60) com $f \equiv 1$ e $L = 1$, i.e.

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.78)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (1.79)$$

Neste caso, a solução analítica $u(x) = -x^2/2 + x/2$ pode ser facilmente obtida por integração.

Agora, vamos computar uma aproximação de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes $V_{h,0} = \{v \in P_1(I); v(0) = v(1) = 0\}$ construído numa malha uniforme de 5 células no intervalo $I = [0, 1]$. Para tanto, consideramos o problema fraco: encontrar $u \in V_0 = \{v \in H^1(I); v(0) = v(L) = 0\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad (1.80)$$

onde

$$a(u, v) = \int_I u'v' dx, \quad L(v) = \int_I f v dx. \quad (1.81)$$

Então, a formulação de elementos finitos associada, lê-se: encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (1.82)$$

A Figura ?? apresenta o esboço dos gráficos da solução analítica u e da sua aproximação de elementos finitos u_h .

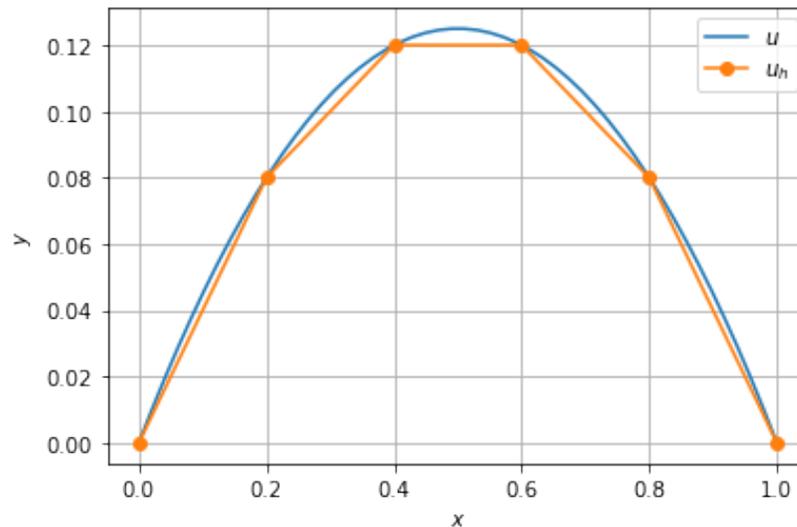


Figura 1.5: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo 1.2.1.

Código 1.3: ex_mef1d_modelo.py

```

1 from mpi4py import MPI
2
3 # malha
4 from dolfinx import mesh
5 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
6                                   nx = 5)
7 # espaço
8 from dolfinx import fem
9 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))
10
11 # condição de contorno
12 import numpy as np
13 uD = fem.Function(V)
14 uD.interpolate(lambda x: np.full(x.shape[1], 0.))

```

```
15
16 tdim = domain.topology.dim
17 fdim = tdim - 1
18 domain.topology.create_connectivity(fdim, tdim)
19 boundary_facets = mesh.exterior_facet_indices(
    domain.topology)
20 boundary_dofs = fem.locate_dofs_topological(V,
    fdim,
21
    boundary_facets)
22 bc = fem.dirichletbc(uD, boundary_dofs)
23
24 # problema mef
25 import ufl
26 from dolfinx import default_scalar_type
27 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
28 u = ufl.TrialFunction(V)
29 v = ufl.TestFunction(V)
30
31 f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
32
33 a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
34 L = f * v * ufl.dx
35
36 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
37 uh = problem.solve()
```

1.2.3 Estimativa *a Priori*

Em revisão

Existem dois tipos de **estimativas do erro** $e := u - u_h$. **Estimativas *a priori***, são aquelas em que o erro é dado em relação da solução u , enquanto que nas **estimativas *a posteriori*** o erro é expresso em relação a solução de elementos finitos u_h .

Teorema 1.2.1. (**Ortogonalidade de Galerkin.**) A solução de elementos

finitos u_h de (1.70) satisfaz a seguinte propriedade de ortogonalidade

$$a(u - u_h, v) := \int_I (u - u_h)' v' dx = 0, \quad v \in V_{h,0}, \quad (1.83)$$

onde u é a solução de (1.66).

Demonstração. De (1.70), (1.66) e lembrando que $V_{h,0} \subset V_0$, temos

$$a(u, v) = L(v) = a(u_h, v) \Rightarrow a(u - u_h, v) = 0, \quad (1.84)$$

para todo $v \in V_{h,0}$. \square

Teorema 1.2.2. (A melhor aproximação.) A solução de elementos finitos u_h dada por (1.70) satisfaz a seguinte propriedade de melhor aproximação

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)} \leq \|(u - v)'\|_{L^2(I)}, \quad v \in V_{h,0}, \quad (1.85)$$

onde u é a solução de (1.66).

Demonstração. Escrevendo $u - u_h = u - v + v - u_h$ para qualquer $v \in V_{h,0}$ e usando a ortogonalidade de Galerkin (Teorema 1.2.1), temos

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}^2 = \int_I (u - u_h)'(u - u_h)' dx \quad (1.86)$$

$$= \int_I (u - u_h)'(u - v + v - u_h)' dx \quad (1.87)$$

$$= \int_I (u - u_h)'(u - v)' dx + \int_I (u - u_h)'(v - u_h)' dx \quad (1.88)$$

$$= \int_I (u - u_h)'(u - v)' dx \quad (1.89)$$

$$\leq \|(u - u_h)'\|_{L^2(I)} \|(u - v)'\|_{L^2(I)}. \quad (1.90)$$

\square

Teorema 1.2.3. (Estimativa a priori.) O erro em se aproximar a solução u de (1.66) pela solução de elementos finitos u_h dada por (1.70) satisfaz a seguinte estimativa a priori

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^2 \|u''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.91)$$

Demonstração. Tomando $v = \pi u$ no teorema da melhor aproximação (Teorema 1.2.2), obtemos

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)} \leq \|(u - \pi u)'\|_{L^2(I)}. \quad (1.92)$$

Daí, da estimativa do erro de interpolação (Proposição 1.1.2), temos

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^2 \|u''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.93)$$

□

Exemplo 1.2.2. A Figura 1.6 apresenta o esboço da evolução do erro $\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}$ da solução de elementos finitos do problema (1.78)-(1.79) para malhas uniformes com $n = 2, 4, 8, \dots, 128$ células.

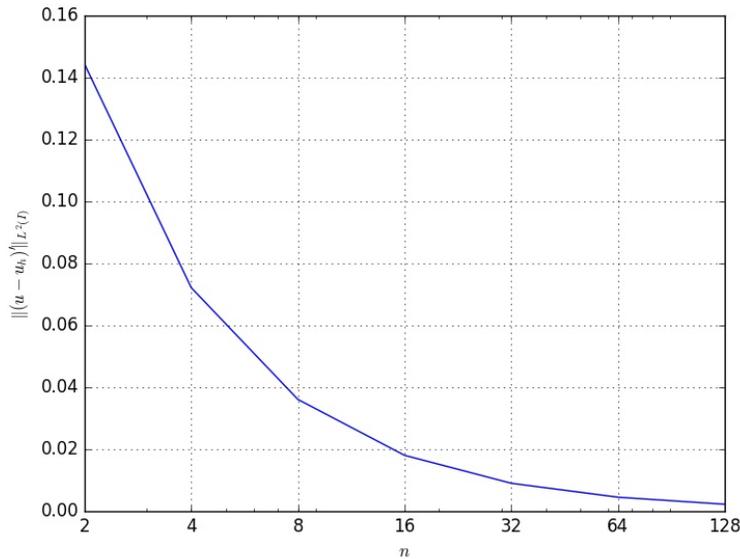


Figura 1.6: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo 1.2.2.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
```

```
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

def solver(n):
    # malha
    mesh = IntervalMesh(n,0,1)

    # espaco
    V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

    bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

    #MEF problem
    u = TrialFunction(V)
    v = TestFunction(V)
    f = Constant(1.0)
    a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx
    L = f*v*dx

    #computa a sol
    u = Function(V)
    solve(a == L, u, bc)

    return u, mesh

#sol analitica
ua = Expression('-x[0]*x[0]/2+x[0]/2',
                degree=2)

lerrors=[]
for n in [2,4,8,16,32,64,128]:
    u, mesh = solver(n)
    e = errornorm(u,ua,norm_type='H10',mesh=mesh)
```

```

lerrors.append(e)

plt.plot([2,4,8,16,32,64,128],lerrors)
plt.xscale('log',base=2)
#plt.yscale('log',base=2)
plt.xlabel(r"$n$")
plt.ylabel(r"$\| (u-u_h)' \|_{L^2(I)}^2$")
plt.xlim((2,128))
plt.xticks([2,4,8,16,32,64,128],[2,4,8,16,32,64,128])
plt.grid('on')
plt.show()

```

1.2.4 Estimativa *a Posteriori*

Em revisão

Aqui, vamos obter uma estimativa *a posteriori* para o erro $e = u - u_h$ da solução de elementos finitos u_h do problema (1.59)-(1.60).

Teorema 1.2.4. *A solução de elementos finitos u_h satisfaz*

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n \eta_i^2(u_h), \quad (1.94)$$

onde $\eta_i(u_h)$ é chamado de elemento residual e é dado por

$$\eta_i(u_h) = h_i \|f - u_h''\|_{L^2(I_i)}. \quad (1.95)$$

Demonstração. Tomando $e = u - u_h$ e usando a ortogonalidade de Galerkin (Teorema 1.2.1) temos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 = \int_I e'(e - \pi e)' dx = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} e'(e - \pi e)' dx. \quad (1.96)$$

Então, aplicando integração por partes

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} (-e'')(e - \pi e) dx + [e'(e - \pi e)]_{x_{i-1}}^{x_i}. \quad (1.97)$$

Daí, observando que $e - \pi e = 0$ nos extremos dos intervalos I_i e que $-e'' = -(u - u_h)'' = -u'' + u_h'' = f + u_h''$, temos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} (f + u_h'')(e - \pi e) dx. \quad (1.98)$$

Agora, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e a estimativa padrão de interpolação (1.26), obtemos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 \leq \sum_{i=1}^n \|f + u_h\|_{L^2(I_i)} \|e - \pi e\|_{L^2(I_i)} dx \quad (1.99)$$

$$\leq C \sum_{i=1}^n h_i \|f + u_h\|_{L^2(I_i)} \|e'\|_{L^2(I_i)} \quad (1.100)$$

$$\leq C \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \|f + u_h\|_{L^2(I_i)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|e'\|_{L^2(I_i)}^2 \right)^{1/2} \quad (1.101)$$

$$= C \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \|f + u_h\|_{L^2(I_i)}^2 \right)^{1/2} \|e'\|_{L^2(I)}, \quad (1.102)$$

donde segue o resultado desejado. □

Observação 1.2.2. No caso da solução de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes, temos $u_h'' = 0$. Logo, o elemento residual se resume em $\eta_i(u_h) = h_i \|f\|_{L^2(I_i)}$.

1.2.5 Exercícios

Em revisão

E.1.2.1. Obtenha uma aproximação por elementos finitos lineares por partes da solução de

$$-u'' + u = 2 \operatorname{sen} x, \quad \forall x \in (-\pi, \pi), \quad (1.103)$$

$$u(-\pi) = u(\pi) = 0. \quad (1.104)$$

Respostas

E.1.2.1. Código FENiCS.

1.3 Condições de Contorno

Em revisão

Nesta seção, vamos discutir sobre soluções de elementos finitos para a equações diferencial

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L], \quad (1.105)$$

com diferentes condições de contorno.

1.3.1 Condições de Dirichlet

Em revisão

Consideramos o seguinte problema com condições de contorno de Dirichlet¹: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \quad (1.106)$$

$$u(0) = u_0, \quad u(L) = u_L, \quad (1.107)$$

com u_0 , u_L e f dados.

Tomando uma função teste $v \in V_0 := H_0^1(I) := \{v \in H^1(I); v(0) = v(L) = 0\}$ e multiplicando-a em (1.106), obtemos

$$-\int_I u'' v \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.108)$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u' v' \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.109)$$

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in V := \{v \in H^1(I); v(0) = u_0, v(L) = u_L\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad (1.110)$$

onde $a(u, v)$ é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u'v' dx \quad (1.111)$$

e $L(v)$ é a forma linear

$$L(v) = \int_I fv dx. \quad (1.112)$$

Exemplo 1.3.1. Consideramos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.113)$$

$$u(0) = 1/2, \quad u(1) = 1. \quad (1.114)$$

Sua solução analítica é $u(x) = -x^2/2 + x + 1/2$.

Para obtermos uma aproximação de elementos finitos, consideramos o seguinte problema fraco: encontrar $u \in V := \{v \in H^1(I); v(0) = 1/2, v(1) = 1\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad (1.115)$$

para todo $v \in V_0 = \{v \in H^1(I); v(0) = v(1) = 0\}$, onde

$$a(u, v) = \int_I u'v' dx, \quad (1.116)$$

$$L(v) = \int_I fv dx. \quad (1.117)$$

Então, o problema de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes lê-se: encontrar $u_h \in V_h = \{v \in P_1(I); v(0) = 1/2, v(1) = 1\}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad (1.118)$$

para todo $v_h \in V_{h,0} = \{v \in H^1(I); v(0) = v(1) = 0\}$.

Código 1.4: ex_mef1d_dirichlet.py

```
1 from mpi4py import MPI
2
3 # malha
4 from dolfinx import mesh
5 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
```

```
6                                     nx = 5)
7 # espaço
8 from dolfinx import fem
9 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))
10
11 # condição de contorno
12 import numpy as np
13 uD = fem.Function(V)
14 def dirichlet_bc(x):
15     y = np.full(x.shape[1], 0.5)
16     y[x[0,:] > 0.5] = 1.
17     return y
18 uD.interpolate(dirichlet_bc)
19
20 tdim = domain.topology.dim
21 fdim = tdim - 1
22 domain.topology.create_connectivity(fdim, tdim)
23 boundary_facets = mesh.exterior_facet_indices(
    domain.topology)
24 boundary_dofs = fem.locate_dofs_topological(V,
    fdim,
25     boundary_facets)
26 bc = fem.dirichletbc(uD, boundary_dofs)
27
28 # problema mef
29 import ufl
30 from dolfinx import default_scalar_type
31 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
32 u = ufl.TrialFunction(V)
33 v = ufl.TestFunction(V)
34
35 f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
36
37 a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
38 L = f * v * ufl.dx
39
40 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
```

```

41 uh = problem.solve()
42
43 # armazena para visualização (paraview)
44 from dolfinx import io
45 from pathlib import Path
46 results_folder = Path("results")
47 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
48 filename = results_folder / "u"
49 with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(
    ".xdmf"), "w") as xdmf:
50     xdmf.write_mesh(domain)
51     xdmf.write_function(uh)

```

1.3.2 Condições de Neumann

Em revisão

Consideramos o seguinte problema com condições de contorno de Neumann² homogênea em $x = L$: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \quad (1.119)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(L) = 0, \quad (1.120)$$

com u_0 e f dados. Trata-se de um **problema com condição de contorno de Dirichlet** à esquerda e **condição de contorno de Neumann**³ homogênea à direita.

Tomando uma função teste $v \in V := \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}$ e multiplicando-a em (1.119), obtemos

$$-\int_I u''v \, dx = \int_I fv \, dx. \quad (1.121)$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u'v' \, dx - \underbrace{u'(L)v(L)}_{u'(L)=0} + \underbrace{u'(0)v(0)}_{v(0)=0} = \int_I fv \, dx. \quad (1.122)$$

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in \tilde{V} := \{v \in H^1(I); v(0) = u_0\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.123)$$

onde $a(u, v)$ é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u'v' dx \quad (1.124)$$

e $L(v)$ é a forma linear

$$L(v) = \int_I fv dx. \quad (1.125)$$

Exemplo 1.3.2. Consideramos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.126)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (1.127)$$

Sua solução analítica é $u(x) = -x^2/2 + x$.

Podemos construir uma aproximação por elementos finitos do seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in V = \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad (1.128)$$

para todo $v \in V$, com as formas bilinear $a(\cdot, \cdot)$ e linear $L(\cdot)$ dadas em (1.124) e (1.125).

Então, considerando elementos lineares por partes, temos o seguinte problema de elementos finitos: encontrar $u_h \in V_h = \{v_h \in P_1(I); v_h(0) = 0\}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.129)$$

Código 1.5: ex_mef1d_neumann.py

```

1 from mpi4py import MPI
2
3 # malha
4 from dolfinx import mesh
5 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
6                                     nx = 5)
7 # espaço
8 from dolfinx import fem
9 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))
10

```

```
11 # c.c. dirichlet
12 import numpy as np
13 from dolfinx.fem import dirichletbc,
    locate_dofs_geometrical
14 uD = fem.Function(V)
15 uD.interpolate(lambda x: np.full(x.shape[1], 0.))
16
17 def boundary_D(x):
18     return np.isclose(x[0], 0.)
19
20 dofs_D = locate_dofs_geometrical(V, boundary_D)
21 bc = dirichletbc(uD, dofs_D)
22
23 # problema mef
24 import ufl
25 from dolfinx import default_scalar_type
26 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
27 u = ufl.TrialFunction(V)
28 v = ufl.TestFunction(V)
29
30 f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
31
32 a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
33 L = f * v * ufl.dx
34
35 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
36 uh = problem.solve()
37
38 # armazena para visualização (paraview)
39 from dolfinx import io
40 from pathlib import Path
41 results_folder = Path("results")
42 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
43 filename = results_folder / "u"
44 with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(
    ".xdmf"), "w") as xdmf:
45     xdmf.write_mesh(domain)
46     xdmf.write_function(uh)
```

Agora, consideramos o seguinte problema com condições de Neumann não-homogênea em $x = L$: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \quad (1.130)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(L) = \alpha, \quad (1.131)$$

com u_0 , α e f dados.

Tomando uma função teste $v \in V := \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}$ e multiplicando-a em (1.130), obtemos

$$-\int_I u''v \, dx = \int_I fv \, dx. \quad (1.132)$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u'v' \, dx - \alpha v(L) = \int_I fv \, dx. \quad (1.133)$$

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in \tilde{V} := \{v \in H^1(I); v(0) = u_0\}$ tal que

$$a(u, v) - b(L(v)), \quad \forall v \in V, \quad (1.134)$$

onde $a(u, v)$ é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u'v' \, dx \quad (1.135)$$

e $L(v)$ é a forma linear

$$L(v) = \int_I fv \, dx + \alpha v(L). \quad (1.136)$$

Exemplo 1.3.3. Consideramos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.137)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 1. \quad (1.138)$$

Sua solução analítica é $u(x) = -x^2/2 + 2x$.

Agora, consideramos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in V = \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.139)$$

com

$$a(u, v) = \int_I u'v' dx \quad (1.140)$$

e

$$L(v) = \int_I fv dx + 1 \cdot v(1). \quad (1.141)$$

Então, consideramos o seguinte problema de elementos finitos associado: encontrar $u_h \in V_h = \{v_h \in P_1(I); v_h(0) = 0\}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.142)$$

Código 1.6: ex_mefld_neumann_nh.py

```

1 from mpi4py import MPI
2
3 # malha
4 from dolfinx import mesh
5 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
6                                     nx = 5)
7 # espaço
8 from dolfinx import fem
9 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))
10
11 # c.c. dirichlet
12 import numpy as np
13 from dolfinx.fem import dirichletbc,
14     locate_dofs_geometrical
15 uD = fem.Function(V)
16 uD.interpolate(lambda x: np.full(x.shape[1], 0.))
17
18 def boundary_D(x):
19     return np.isclose(x[0], 0.)
20
21 dofs_D = locate_dofs_geometrical(V, boundary_D)
22 bc = dirichletbc(uD, dofs_D)
23
24 # problema mef
25 import ufl
26 from dolfinx import default_scalar_type

```

```

26 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
27 u = ufl.TrialFunction(V)
28 v = ufl.TestFunction(V)
29
30 f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
31 g = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
32
33 a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
34 L = f * v * ufl.dx
35 L += g * v * ufl.ds
36
37 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
38 uh = problem.solve()
39
40 # armazena para visualização (paraview)
41 from dolfinx import io
42 from pathlib import Path
43 results_folder = Path("results")
44 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
45 filename = results_folder / "u"
46 with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(
    ".xdmf"), "w") as xdmf:
47     xdmf.write_mesh(domain)
48     xdmf.write_function(uh)

```

1.3.3 Condições de Robin

Em revisão

Consideramos o seguinte problema com condições de contorno de Robin⁴: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \quad (1.143)$$

$$u'(0) = r_0(u(0) - s_0), \quad -u'(L) = r_L(u(L) - s_L), \quad (1.144)$$

com r_0, r_L, s_0, s_L e f dados.

Tomando uma função teste $v \in V = H^1(I)$ e multiplicando-a em (1.143),

obtemos

$$-\int_I u''v \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.145)$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u'v' \, dx - \underbrace{u'(L)v(L)}_{-u'(L)=r_L(u(L)-s_L)} + \underbrace{u'(0)v(0)}_{u'(0)=r_0(u(0)-s_0)} = \int_I f v \, dx. \quad (1.146)$$

ou, mais adequadamente,

$$\int_I u'v' \, dx + r_L u(L)v(L) + r_0 u(0)v(0) = \int_I f v \, dx + r_L s_L v(L) + r_0 s_0 v(0). \quad (1.147)$$

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in H^1(I)$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.148)$$

onde $a(u, v)$ é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u'v' \, dx + r_L u(L)v(L) + r_0 u(0)v(0) \quad (1.149)$$

e $L(v)$ é a forma linear

$$L(v) = \int_I f v \, dx + r_L s_L v(L) + r_0 s_0 v(0). \quad (1.150)$$

Exemplo 1.3.4. Consideramos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.151)$$

$$u'(0) = u(0), \quad -u'(1) = u(1) - 1. \quad (1.152)$$

Sua solução analítica é $u(x) = -x^2/2 + 5x/6 + 5/6$.

Aqui, tomamos o seguinte problema fraco: encontrar $u \in V = H^1(I)$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.153)$$

onde

$$a(u, v) = \int_I u'v' \, dx + u(1)v(1) + u(0)v(0) \quad (1.154)$$

e

$$L(v) = \int_I f v \, dx + 1 \cdot v(1). \quad (1.155)$$

Então, uma aproximação por elementos finitos lineares por partes pode ser obtida resolvendo o seguinte problema: encontrar $u_h \in V_h = P_1(I)$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.156)$$

```

1 from mpi4py import MPI
2
3 # malha
4 from dolfinx import mesh
5 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
6                                   nx = 5)
7 # espaço
8 from dolfinx import fem
9 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))
10
11 # boundary colors
12 from dolfinx.mesh import locate_entities
13 from dolfinx.mesh import meshtags
14 boundaries = [(0, lambda x: np.isclose(x[0], 0.)),
15              (1, lambda x: np.isclose(x[0], 1.))]
16 facet_indices, facet_markers = [], []
17 fdim = domain.topology.dim - 1
18 for (marker, locator) in boundaries:
19     facets = locate_entities(domain, fdim, locator
20                             )
21     facet_indices.append(facets)
22     facet_markers.append(np.full_like(facets,
23                                     marker))
24 facet_indices = np.hstack(facet_indices).astype(np
25                          .int32)
26 facet_markers = np.hstack(facet_markers).astype(np
27                          .int32)
28 sorted_facets = np.argsort(facet_indices)
29 facet_tag = meshtags(domain, fdim, facet_indices[
30                      sorted_facets], facet_markers[sorted_facets])

```

```
26
27 # problema mef
28 import ufl
29 from dolfinx import default_scalar_type
30 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
31 u = ufl.TrialFunction(V)
32 v = ufl.TestFunction(V)
33
34 f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
35 g = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
36
37 ds = ufl.Measure('ds', domain=domain,
38                 subdomain_data=facet_tag)
39
40 a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
41 a += u * v * ds(1) + u * v * ds(0)
42 L = f * v * ufl.dx
43 L += g * v * ds(1)
44
45 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[])
46 uh = problem.solve()
47
48 # armazena para visualização (paraview)
49 from dolfinx import io
50 from pathlib import Path
51 results_folder = Path("results")
52 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
53 filename = results_folder / "u"
54 with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(
55     ".xdmf"), "w") as xdmf:
56     xdmf.write_mesh(domain)
57     xdmf.write_function(uh)
```

1.3.4 Exercícios

Em revisão

E.1.3.1. Considere o problema

$$-u'' + u' + 2u = -\cos(x), \quad x \in (0, \pi/2), \quad (1.157)$$

$$u(0) = -0,3, \quad u(\pi/2) = -0,1. \quad (1.158)$$

Obtenha uma aproximação por elementos finitos para a solução deste problema, empregando o espaço de elementos finitos linear sobre uma malha uniforme com 10 células. Então, compare a aproximação computada com sua solução analítica $u(x) = 0,1(\sin(x) + 3\cos(x))$, bem como, compute o erro $\|u - u_h\|_{L^2}$.

Respostas

E.1.3.1. [Código](#).

1.4 Malhas Auto-Adaptativas

Em revisão

Retornemos ao problema modelo (1.59)-(1.60)

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L], \quad (1.159)$$

$$u(0) = u(L) = 0. \quad (1.160)$$

A estimativa *a posteriori* dada no Teorema 1.2.4, indica que os elementos residuais $\eta_i(u_h)$ podem ser utilizados para estimarmos a precisão da aproximação por elementos finitos. Ou seja, espera-se que quanto menores forem os elementos residuais, mais precisa é a solução por elementos finitos. Além disso, como

$$\eta_i(u_h) = h_i \|f - u_h''\|_{L^2(I_i)}, \quad (1.161)$$

podemos reduzir $\eta_i(u_h)$ diminuindo o tamanho da célula I_i .

Do observado acima, motiva-se o seguinte algoritmo de elementos finitos com refinamento automático de malha:

1. Escolhemos uma malha inicial.
2. Iteramos:

2. Resolvemos o problema de elementos finitos na malha corrente.
2. Computamos $\eta_i(u_h)$ em cada célula da malha corrente.
2. Com base na malha corrente, Construimos uma nova malha pelo refinamento das células com os maiores valores de $\eta_i(u_h)$.
2. Verificamos o critério de parada.

Uma estratégia clássica para a escolha das células a serem refinadas é a seguinte: refina-se a i -ésima célula se

$$\eta_i(u_h) > \alpha \max_{j=1,2,\dots,n} \eta_j(u_h), \quad (1.162)$$

onde escolhemos $0 < \alpha < 1$.

Exemplo 1.4.1. Consideramos o problema

$$-u'' = e^{-100|x-\frac{1}{2}|}, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.163)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (1.164)$$

Aqui, computamos aproximações de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes $V_{h,0} = \{v \in P_1(I); v(0) = v(1) = 0\}$ com sucessivos refinamentos de malha. Utilizamos uma malha inicial uniforme com 10 células e fazemos, então, 5 refinamentos sucessivos utilizando como critério de refinamento a estratégia (1.162) com $\alpha = 0,5$. A Figura 1.7 apresenta o esboço do gráfico da solução de elementos finitos na malha mais refinada. Além disso, na Tabela 1.1 temos os o número de células e o $\eta_i(u_h)$ máximo respectivo.

#malha	#células	$\max_i \eta_i(u_h)$
0	10	5.0E-03
1	12	2.0E-03
2	14	8.6E-04
3	22	2.9E-04
4	30	1.4E-04
5	38	6.1E-05

Tabela 1.1: Resultados referente ao Exemplo 1.4.1.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte código:

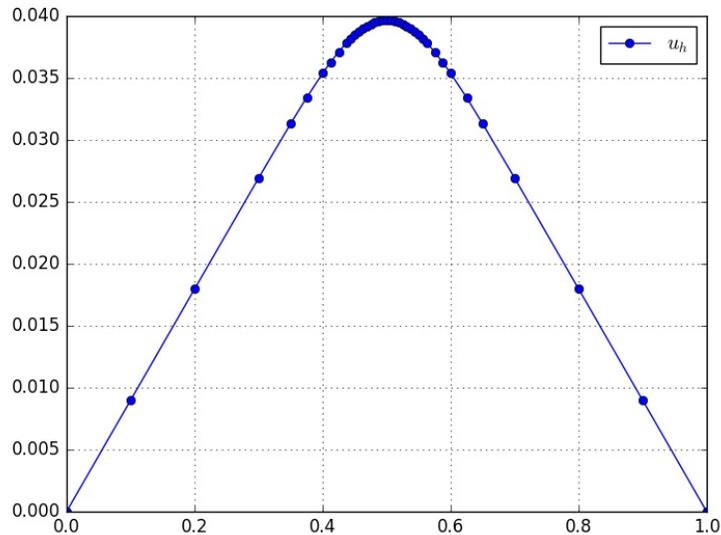


Figura 1.7: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo 1.4.1.

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
mesh = IntervalMesh(10,0,1)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# fonte
f = Expression('exp(-100*pow(fabs(x[0]-0.5),2))', degree=1)

# condicoes de contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary
```

```
#iteracoes
for iter in np.arange(6):

    #problema
    bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)
    u = TrialFunction(V)
    v = TestFunction(V)
    a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx
    L = f*v*dx

    #resolve
    u = Function(V)
    solve(a == L, u, bc)

    #grafico
    plt.close('all')
    xx = mesh.coordinates()[:,0]
    sorted_indices = np.argsort(xx)
    yy = u.compute_vertex_values()
    plt.plot(xx[sorted_indices],yy[sorted_indices],
             marker="o",label=r"$u_h$")
    plt.legend(numpoints=1)
    plt.grid('on')
    plt.show()

    DG = FunctionSpace(mesh, "DG", 0)
    v = TestFunction(DG)
    a = CellVolume(mesh)
    eta = assemble(f**2*v*a*dx)

    # refinamento da malha
    cell_markers = MeshFunction("bool", mesh, mesh.topology().dim(), False)
    eta_max = np.amax(eta[:])
    print(eta_max)
    print("%d %d %1.1E\n" % (iter,mesh.num_cells(),eta_max))
    alpha = 0.5
    for i,cell in enumerate(cells(mesh)):
        if (eta[i] > alpha*eta_max):
```

```

cell_markers[cell] = True

mesh = refine(mesh, cell_markers)
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

```

1.4.1 Exercícios

Em revisão

E.1.4.1. Use uma estratégia de sucessivos refinamentos globais para resolver o problema dado no Exemplo 1.4.1. Compare seus resultados com aqueles obtidos no exemplo.

Respostas

E.1.4.1. [Código](#).

1.5 Aplicação: EDP Evolutiva

Em construção

Como exemplo de **aplicação do método de elementos finitos (MEF) na solução de equações diferenciais parciais evolutivas no tempo**, consideramos a **equação do calor** com dadas condição inicial e condições de contorno de Dirichlet homogêneas

$$u_t = \alpha u_{xx} + f, \quad (t, x) \in (0, t_f] \times (a, b), \quad (1.165a)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.165b)$$

$$u(t, a) = u(t, b) = 0, \quad t \in [0, t_f], \quad (1.165c)$$

onde $f = f(t, x)$ denota uma dada fonte.

1.5.1 Discretização do Tempo

Consideramos os $n_t + 1$ tempos discretos $t^{(k)} = kh_t$, passo no tempo $h_t = t_f/n_t$, $k = 0, 1, 2, \dots, n_t$. Seguindo esquema θ denotando $u^{(k)} \approx u(t^{(k)}, x)$ e

$f^{(k)} = f(t^{(k)}, x)$, o problema (1.165) pode ser aproximado pela iteração

$$\frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{h_t} = \theta \left(\alpha u_{xx}^{(k+1)} + f^{(k+1)} \right) + (1 - \theta) \left(\alpha u_{xx}^{(k)} + f^{(k)} \right), \quad (1.166a)$$

$$u^{(k+1)}(a) = u^{(k+1)}(b) = 0, \quad (1.166b)$$

onde $u^{(0)} = u_0$.

Observação 1.5.1. (Esquema θ .) O esquema θ é uma forma robusta de escrever diferentes esquemas de discretização em uma única expressão:

- $\theta = 0$.: Euler explícito.
- $\theta = 1$.: Euler implícito.
- $\theta = 0.5$: Crank-Nicolson.

Por simplificação da notação, vamos suprimir o super-índice k , denotando $u^{(k+1)} := u$, $u^{(k)} = u^0$ e similar para $f^{(k)}$. Com isso e rearranjando os termos, cada iteração (1.166) se resume ao seguinte problema de valores de contorno

$$-\alpha\theta u_{xx} + \frac{1}{h_t}u = \frac{1}{h_t}u^0 + (1 - \theta)\alpha u_{xx}^0 + (1 - \theta)f^0 + \theta f, \quad (1.167a)$$

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (1.167b)$$

1.5.2 Formulação de Elementos Finitos

A formulação fraca do problema (1.167) consiste em: encontrar $u \in V := H_0^1(a, b)$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.168)$$

onde

$$a(u, v) := \int_a^b \theta \alpha u' v' dx + \int_a^b \frac{1}{h_t} uv dx, \quad (1.169)$$

$$L(v) := (1 - \theta) \int_a^b \alpha u^0 v' dx + \int_a^b \frac{1}{h_t} u^0 v dx$$

$$\theta \int_a^b f v \, dx + (1 - \theta) \int_a^b f^0 v \, dx \quad (1.170)$$

Então, assumindo uma malha com n_x células $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ de tamanho $h_x = (b - a)/n_x$ e nodos $x_i = a + (i - 1)h_x$, $i = 0, 1, 2, \dots, n_x$, escolhemos o espaço de elementos finitos

$$V_{h,0} := \{v \in C^0([a, b]) : v|_{I_i} \in P_1(I_i), i = 0, 1, \dots, n_x, v(a) = v(b) = 0\}. \quad (1.171)$$

Com isso, a formulação de elementos finitos do problema (1.167) consiste em: encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (1.172)$$

Exemplo 1.5.1. Consideramos o seguinte problema de calor

$$u_t = u_{xx} + (\pi^2 - 1)e^{-t} \operatorname{sen}(\pi x), \quad (t, x) \in (0, 1] \times (0, 1), \quad (1.173a)$$

$$u(0, x) = \operatorname{sen}(\pi x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.173b)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0. \quad (1.173c)$$

```

1 from mpi4py import MPI
2 import ufl
3 from dolfinx import mesh
4 from dolfinx import fem
5 from dolfinx import default_scalar_type
6 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
7
8 # parâmetros
9 tf = 1.
10 alpha = 1.
11
12 # esquema theta
13 theta = 0.5
14
15 # discretização no tempo
16 nt = 10
17 ht = tf/nt

```

```
18
19 # malha
20 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
21                                   nx = 5)
22 x = ufl.SpatialCoordinate(domain)
23
24 # espaço
25 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))
26
27 # fonte
28 f = fem.Function(V)
29 def f(t,x):
30     return (ufl.pi**2-1.)*ufl.exp(-t)*ufl.sin(ufl.
31         pi*x[0])
32 # condição de contorno
33 import numpy as np
34 uD = fem.Function(V)
35 uD.interpolate(lambda x: np.full(x.shape[1], 0.))
36
37 def boundary_D(x):
38     return np.logical_or(np.isclose(x[0], 0.),
39                          np.isclose(x[0], 1.))
40
41 dofs_D = fem.locate_dofs_geometrical(V, boundary_D
42 )
43
44 # mef fun.s
45 u = ufl.TrialFunction(V)
46 v = ufl.TestFunction(V)
47
48 # condição inicial
49 t = 0.
50 u0 = fem.Function(V)
51 u0.interpolate(lambda x: np.sin(np.pi*x[0]))
52
53 # fonte
```

```
54 def f(t, x):
55     return (ufl.pi**2-1.)*ufl.exp(-t)*ufl.sin(ufl.
    pi*x[0])
56
57 # visualização (paraview)
58 from dolfinx import io
59 from pathlib import Path
60 results_folder = Path("results")
61 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
62
63 # iteração no tempo
64 for k in range(nt):
65     t += ht
66
67     # forma bilinear
68     a = theta * ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v))
    * ufl.dx
69     a += u * v / ht * ufl.dx
70
71     # forma linear
72     L = (theta-1.) * ufl.dot(ufl.grad(u0), ufl.
    grad(v)) * ufl.dx
73     L += u0 * v / ht * ufl.dx
74     L += theta * f(t, x) * v * ufl.dx
75     L += (1.-theta) * f(t-ht, x) * v * ufl.dx
76
77     problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
78     uh = problem.solve()
79
80     # armazena para visualização (paraview)
81     filename = results_folder / f"u_{k:0>6}"
82     with io.XDMFFile(domain.comm, filename.
    with_suffix(".xdmf"), "w") as xdmf:
83         xdmf.write_mesh(domain)
84         xdmf.write_function(uh, t)
85
86     u0.x.array[:] = uh.x.array[:]
```

1.5.3 Exercícios

Em construção

1.6 Aplicação: EDP de Advecção-Difusão

Em construção

1.6.1 Exercícios

Em construção

1.7 Aplicação: EDP Não-Linear

Em construção

Como exemplo de aplicação do MEF na solução de **equações diferenciais parciais não-lineares**, consideramos a **equação de Fisher**⁵ com dadas condição inicial e condições de contorno de Neumann⁶

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u), \quad (t, x) \in (0, t_f] \times (0, 1), \quad (1.174a)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.174b)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad t \in [0, t_f]. \quad (1.174c)$$

1.7.1 Discretização do Tempo

Consideramos os $n_t + 1$ tempos discretos $t^{(k)} = kh_t$, passo no tempo $h_t = t_f/n_t$, $k = 0, 1, 2, \dots, n_t$. Seguindo esquema θ denotando $u^{(k)} \approx u(t^{(k)}, x)$, o problema (1.174) pode ser aproximado pela iteração

$$\frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{h_t} = \theta \left[u_{xx}^{(k+1)} + u^{(k+1)} (1 - u^{(k+1)}) \right] \\ (1 - \theta) \left[u_{xx}^{(k)} + u^{(k)} (1 - u^{(k)}) \right], \quad (1.175a)$$

$$u_x^{(k+1)}(0) = u_x^{(k+1)}(1) = 0, \quad (1.175b)$$

onde $u^{(0)} = u_0$.

Observação 1.7.1. (Esquema θ .) O esquema θ é uma forma robusta de escrever diferentes esquemas de discretização em uma única expressão:

- $\theta = 0$.: Euler explícito.
- $\theta = 1$.: Euler implícito.
- $\theta = 0.5$: Crank-Nicolson.

Por simplificação da notação, vamos suprimir o super-índice k , denotando $u^{(k+1)} := u$, $u^{(k)} = u^0$. Com isso e rearranjando os termos, cada iteração (1.175) se resume ao seguinte problema de valores de contorno

$$\frac{1}{h_t}u - \frac{1}{h_t}u^0 - \theta [u_x x + u(1-u)] - (1-\theta) [u_x^0 x + u^0(1-u^0)], \quad (1.176a)$$

$$u_x(0) = u_x(1) = 0. \quad (1.176b)$$

1.7.2 Formulação de Elementos Finitos

Em revisão

A formulação fraca do problema (1.176) consiste em: encontrar $u \in V := H^1[0, 1]$ tal que

$$F(u; v) = 0, \quad \forall v \in V, \quad (1.177)$$

onde

$$\begin{aligned} F(u; v) &:= \int_0^1 \frac{1}{h_t} u \, dx - \int_0^1 \frac{1}{h_t} u^0 \, dx \\ &+ \theta \int_0^1 u_x v_x \, dx - \theta \int_0^1 u(1-u)v \, dx \\ &+ (1-\theta) \int_0^1 u_x^0 v_x \, dx - (1-\theta) \int_0^1 u^0(1-u^0)v \, dx. \end{aligned} \quad (1.178)$$

Então, assumindo uma malha com n_x células $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ de tamanho $h_x = 1/n_x$ e nodos $x_i = (i-1)h_x$, $i = 0, 1, 2, \dots, n_x$, escolhemos o espaço de elementos finitos

$$V_h := \{v \in C^0([a, b]) : v|_{I_i} \in P_1(I_i), \quad i = 0, 1, \dots, n_x\}. \quad (1.179)$$

Com isso, a formulação de elementos finitos do problema (1.176) consiste em: encontrar $u_h \in V_h$ tal que

$$F(u_h; v) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.180)$$

Observação 1.7.2. O problema (1.180) consiste em um sistema de equações não-lineares.

Exemplo 1.7.1. Consideramos a equação de Fisher com condições inicial e de contorno

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u), \quad t \in (0, t_f) \times (0, 1), \quad (1.181a)$$

$$u(0, x) = \cos^2(\pi x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.181b)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad t \in [0, t_f], \quad (1.181c)$$

com $t_f = 5$.

Código 1.7: ex_mef1d_fisher.py

```

1  from mpi4py import MPI
2  import numpy as np
3  import ufl
4  from dolfinx import mesh
5  from dolfinx import fem
6  from dolfinx import default_scalar_type
7  from dolfinx.fem.petsc import NonlinearProblem
8  from dolfinx.nls.petsc import NewtonSolver
9
10 # parâmetros
11 tf = 5.
12
13 # esquema theta
14 theta = 0.5
15
16 # discretização no tempo
17 nt = 100
18 ht = tf/nt
19
20 # malha

```

```
21 domain = mesh.create_unit_interval(MPI.  
COMM_WORLD,  
22                                     nx = 5)  
23 x = ufl.SpatialCoordinate(domain)  
24  
25 # espaço  
26 V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))  
27  
28 # mef fun.s  
29 v = ufl.TestFunction(V)  
30 u = fem.Function(V)  
31  
32 # condição inicial  
33 t = 0.  
34 u0 = fem.Function(V)  
35 u0.interpolate(lambda x: np.cos(np.pi*x[0])**2)  
36  
37 # inicialização  
38 u.x.array[:] = u0.x.array[:]  
39  
40 # visualização (paraview)  
41 from dolfinx import io  
42 from pathlib import Path  
43 results_folder = Path("results")  
44 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True  
)  
45  
46 # armazena para visualização (paraview)  
47 filename = results_folder / f"u_{0:0>6}"  
48 with io.XDMFFile(domain.comm, filename.  
with_suffix(".xdmf"), "w") as xdmf:  
49     xdmf.write_mesh(domain)  
50     xdmf.write_function(u, 0.)  
51  
52  
53 # iteração no tempo  
54 for k in range(nt):  
55
```

```

56     t += ht
57     print(f"{k+1}: t = {t:.4g}")
58
59     # forma fraca
60     ## time term
61     F = 1./ht * u * v * ufl.dx
62     F -= 1./ht * u0 * v * ufl.dx
63     ## diffusion term
64     F += theta * ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v
65 )) * ufl.dx
66     F += (1.-theta) * ufl.dot(ufl.grad(u0), ufl.
67 grad(v)) * ufl.dx
68     ## reaction term
69     F -= theta * u * (1. - u) * v * ufl.dx
70     F -= (1.-theta) * u0 * (1. - u0) * v * ufl.
71 dx
72
73     problem = NonlinearProblem(F, u)
74     solver = NewtonSolver(MPI.COMM_WORLD,
75 problem)
76     n, converged = solver.solve(u)
77     print(f"\tNewton iterations: {n}")
78     assert(converged)
79
80     # armazena para visualização (paraview)
81     filename = results_folder / f"u_{k+1:0>6}"
82     with io.XDMFFile(domain.comm, filename.
83 with_suffix(".xdmf"), "w") as xdmf:
84         xdmf.write_mesh(domain)
85         xdmf.write_function(u, t)
86
87     u0.x.array[:] = u.x.array[:]

```

1.7.3 Exercícios

Em construção

1.8 Seleção de Aplicações

Em revisão

1.8.1 Sistemas de Equações

Em revisão

Consideramos o seguinte problema de equações diferenciais ordinárias com valores de contorno

$$-u_0'' + u_1 = f_0, \forall x \in (0, L) \quad (1.182)$$

$$-u_1'' + u_0 = f_1, \forall x \in (0, L) \quad (1.183)$$

$$u_0(0) = u_{00}, \quad u_0(L) = u_{0L}, \quad (1.184)$$

$$u_1(0) = u_{10}, \quad u_1(L) = u_{1L}, \quad (1.185)$$

onde $f_0, f_1, u_{00}, u_{0L}, u_{10}, u_{1L}$ são dados.

Para construirmos uma aproximação por elementos finitos podemos tomar o seguinte problema fraco associado: encontrar $u = (u_0, u_1) \in V_0 \times V_1$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \forall v = (v_0, v_1) \in V \times V, \quad (1.186)$$

onde $V_0 = \{v \in H^1(I); v_0(0) = u_{00}, v_0(L) = u_{0L}\}$, $V_1 = \{v_1 \in H^1(I); v_1(0) = u_{10}, v_1(L) = u_{1L}\}$, $V = \{v \in H^1(I); v(0) = v(L) = 0\}$, a forma bilinear é

$$a(u, v) = \int_I u_0' v_0' dx + \int_I u_1' v_1' dx + \int_I u_0 v_0 dx + \int_I u_1 v_1 dx \quad (1.187)$$

e a forma linear é

$$L(v) = \int_I f_0 v_0 dx + \int_I f_1 v_1 dx. \quad (1.188)$$

Então, o problema de elemento finitos associado no espaço das funções lineares por partes lê-se: encontrar $u_h = (u_{h0}, u_{h1}) \in V_{h0} \times V_{h1}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h = (v_{h0}, v_{h1}) \in V_h \times V_h, \quad (1.189)$$

onde $V_{h0} = \{v_h \in P_1(I); v_{h0}(0) = u_{00}, v_{h0}(L) = u_{0L}\}$, $V_{h1} = \{v_{h1} \in P_1(I); v_{h1}(0) = u_{10}, v_{h1}(L) = u_{1L}\}$, $V_h = \{v_h \in P_1(I); v_h(0) = v_h(L) = 0\}$.

Exemplo 1.8.1. Consideramos o seguinte problema de valor de contorno

$$-u_0'' + u_1 = \sin(x) + \cos(x), \forall x \in (-\pi, \pi) \quad (1.190)$$

$$-u_1'' + u_0 = \cos(x) - \sin(x), \forall x \in (-\pi, \pi) \quad (1.191)$$

$$u_0(-\pi) = 0, \quad u_0(\pi) = 0, \quad (1.192)$$

$$u_1(-\pi) = -1, \quad u_1(\pi) = -1. \quad (1.193)$$

Considerando elementos lineares por partes, temos a seguinte formulação de elementos finitos: encontrar $u_h = (u_{h0}, u_{h1}) \in V_{h0} \times V_{h1}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h = (v_{h0}, v_{h1}) \in V_h \times V_h, \quad (1.194)$$

onde $V_{h0} = \{v_h \in P_1(I); v_{h0}(0) = v_{h0}(L) = 0\}$, $V_{h1} = \{v_{h1} \in P_1(I); v_{h1}(0) = v_{h1}(L) = -1\}$, $V_h = \{v_h \in P_1(I); v_h(0) = v_h(L) = 0\}$, com as formas bilinear e linear são dadas em (1.187) e (1.188), respectivamente.

A Figura 1.8 apresenta o esboço dos gráficos das soluções analíticas $u_0(x) = \sin(x)$ e $u_1(x) = \cos(x)$ e de suas aproximações de elementos finitos u_{h0} e u_{h1} , estas construídas no espaço dos polinômios lineares por partes sobre uma malha uniforme de 5 células.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#tolerance
tol=1e-14

# malha
mesh = IntervalMesh(10,-pi,pi)

# espaco
P1 = FiniteElement('P', interval, 1)
element = MixedElement([P1,P1])
V = FunctionSpace(mesh, element)
```

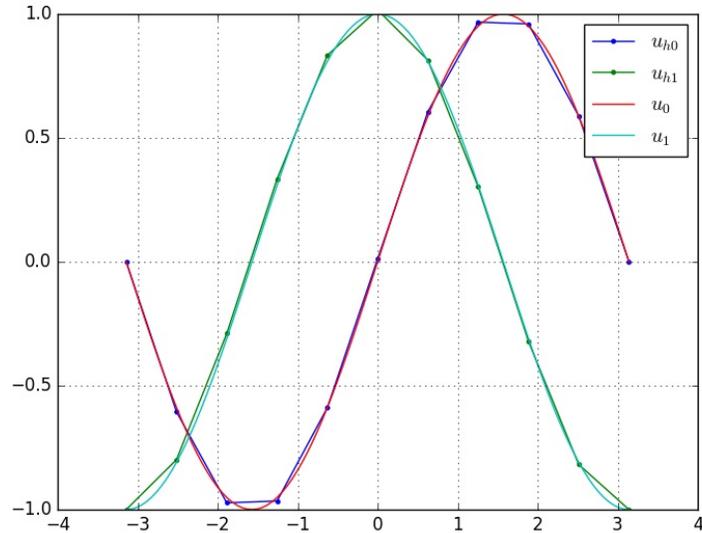


Figura 1.8: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo 1.8.1.

```
#C.C.
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = [DirichletBC(V.sub(0),Constant(0.0),boundary),
      DirichletBC(V.sub(1),Constant(-1.0),boundary)]
print(bc)

#MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
f0 = Expression('sin(x[0]) + cos(x[0])',
                degree=10)
f1 = Expression('cos(x[0]) - sin(x[0])',
                degree=10)
a = u[0].dx(0)*v[0].dx(0)*dx
a += u[1]*v[0]*dx
```

```
a += u[1].dx(0)*v[1].dx(0)*dx
a -= u[0]*v[1]*dx
L = f0*v[0]*dx
L += f1*v[1]*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

#sol analitica
u0a = Expression('sin(x[0])',
                  degree=10)
u1a = Expression('cos(x[0])',
                  degree=10)

plot(u[0],mesh=mesh,marker='.',label=r"$u_{h0}$")
plot(u[1],mesh=mesh,marker='.',label=r"$u_{h1}$")
mesh = IntervalMesh(100,-pi,pi)
plot(u0a,mesh=mesh,label=r"$u_0$")
plot(u1a,mesh=mesh,label=r"$u_1$")
plt.legend(numpoints=1)
plt.grid('on')
plt.show()
```

1.8.2 Exercícios

[[tag:construcao]]

Capítulo 2

Problemas Bidimensionais

2.1 Malha e Espaço

Em revisão

2.1.1 Malha

Em revisão

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e poligonal. Uma **malha (ou triangularização) \mathcal{K} de Ω é um conjunto de $\{K\}$ células (ou elementos) K , em que $\Omega = \cup_{K \in \mathcal{K}} K$ e tal que a interseção de duas células é ou um lado, um canto ou vazio.**

Classicamente as células K são escolhidas como triângulos. **O comprimento do maior lado da célula K define o chamado tamanho local da malha h_K . O tamanho global da malha é definida por $h = \max_{K \in \mathcal{K}} h_K$.**

Uma **malha** é dita **regular** quando existe uma constante $c_0 > 0$ tal que $c_K > c_0$ para todo $K \in \mathcal{K}$, sendo $c_K := d_K/h_K$ e d_K o diâmetro do círculo inscrito em K . Esta condição significa que os triângulos K da malha não podem ter ângulos muito grandes nem muito pequenos. **Ao longo do texto, a menos que especificado o contrário, assumiremos trabalhar com malhas**

regulares.

Exemplo 2.1.1. O seguinte código, gera uma malha uniforme no domínio $\Omega = [0, 1]^2$.

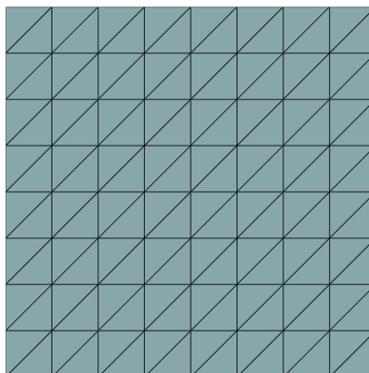


Figura 2.1: Esboço de uma malha triangular no domínio $D = [0, 1]^2$.

Código 2.1: ex_malha.py

```
1 from mpi4py import MPI
2 from dolfinx import mesh
3
4 # malha triangular
5 domain = mesh.create_unit_square(MPI.COMM_WORLD,
6                                   nx = 5, ny = 5)
7
8 # gráfico da malha
9 import pyvista
10 # pyvista.set_jupyter_backend('static')
11 print(pyvista.global_theme.jupyter_backend)
12
13 from dolfinx import plot
14 pyvista.start_xvfb()
```

```

15 tdim = domain.topology.dim
16 topology, cell_types, geometry = plot.vtk_mesh(
    domain, tdim)
17 grid = pyvista.UnstructuredGrid(topology,
    cell_types, geometry)
18
19 plotter = pyvista.Plotter()
20 plotter.add_mesh(grid, show_edges=True)
21 plotter.view_xy()
22 pyvista.OFF_SCREEN=True
23 if not pyvista.OFF_SCREEN:
24     plotter.show()
25 else:
26     figure = plotter.screenshot("malha.png")

```

2.1.2 Espaço de Polinômios Lineares

Em revisão

Seja K um triângulo e seja $P_1(K)$ o espaço dos polinômios lineares em K , i.e.

$$P_1(K) = \{v; v = c_0 + c_1x_0 + c_2x_1, (x_0, x_1) \in K, c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}. \quad (2.1)$$

Observamos que toda função $v \in P_1(K)$ é unicamente determinada por seus valores nodais

$$\alpha_i = v(N_i), i = 0, 1, 2, \quad (2.2)$$

onde $N_i = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)})$ é o i -ésimo nodo (vértice) do triângulo K . Isto segue do fato de que o sistema (2.2) tem forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0^{(0)} & x_1^{(0)} \\ 1 & x_0^{(1)} & x_1^{(1)} \\ 1 & x_0^{(2)} & x_1^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Ainda, o valor absoluto do determinante da matriz de coeficientes é $2|K|$, onde $|K|$ denota a área de K , a qual é não nula.

Afim de usarmos os valores nodais como graus de liberdade (incógnitas), nós introduzimos a seguinte base nodal $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ com

$$\lambda_j(N_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \quad , \quad i, j = 0, 1, 2. \quad (2.4)$$

Com esta base, toda função $v \in P_1(K)$ pode ser escrita como

$$v = \alpha_0 \lambda_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2, \quad (2.5)$$

onde $\alpha_i = v(N_i)$.

2.1.3 Espaço contínuo dos polinômios lineares por partes

Em revisão

O **espaço contínuo dos polinômios lineares por partes** na malha \mathcal{K} é definido por

$$V_h = \{v; v \in C^0(\Omega), v|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{K}\}. \quad (2.6)$$

Observamos que **toda função $v \in V_h$ é unicamente determinada por seus valores nodais** $\{v(N_j)\}_{j=0}^{n_p-1}$, onde n_p é número de nodos da malha \mathcal{K} .

De fato, os valores nodais determinam uma única função em $P_1(K)$ para cada $K \in \mathcal{K}$ e, portanto, uma função em V_h é unicamente determinada por seus valores nos nodos. Agora, consideremos dois triângulos K_1 e K_2 compartilhando um lado $E = K_1 \cap K_2$. Sejam v_1 e v_2 os dois únicos polinômios em $v_1 \in P_1(K_1)$ e $v_2 \in P_1(K_2)$, respectivamente determinados pelos valores nodais em K_1 e K_2 . Como v_1 e v_2 também são polinômios lineares em E e seus valores coincidem nos nodos de E , temos $v_1 = v_2$ em E . Portanto, concluímos que toda função $v \in V_h$ é unicamente determinada por seus valores nodais.

Afim de termos os valores nodais como graus de liberdade (incógnitas), definimos a **base nodal** $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n_p} \subset V_h$ tal que

$$\varphi_j(N_i) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \quad , \quad i, j = 0, 1, \dots, n_p - 1. \quad (2.7)$$

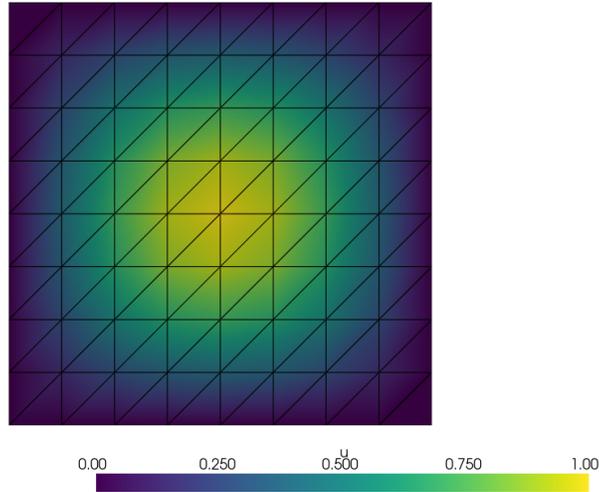


Figura 2.2: Esboço de uma função no espaço V_h com valores nodais $u(\mathbf{x}) = \text{sen}(\pi x_0) \text{sen}(\pi x_1)$.

Notamos que cada função base φ_j é contínua, polinômio linear por partes e com suporte somente em um pequeno conjunto de triângulos que compartilham o nodo N_j . Além disso, toda a função $v \in V_h$ pode, então, ser escrita como

$$v = \sum_{i=0}^{n_p-1} \alpha_i \varphi_i, \quad (2.8)$$

onde $\alpha_i = v(N_i)$, $i = 0, 1, \dots, n_p$, são os valores nodais de v .

Exemplo 2.1.2. No seguinte código, alocamos um espaço de elementos finitos V_h sobre uma malha regular no domínio $\Omega = [0, 1]^2$. Ainda, uma função $u_h \in V_h$ é alocada com valores nodais

$$u(\mathbf{x}) = \text{sen}(\pi x_0) \text{sen}(\pi x_1). \quad (2.9)$$

```
1 from mpi4py import MPI
2 from dolfinx import mesh
3
```

```
4 # malha
5 domain = mesh.create_unit_square(MPI.COMM_WORLD,
  5, 5)
6
7 from dolfinx import fem
8
9 # espaço de elementos finitos
10 V = fem.functionspace(domain, ("P",1))
11
12 # função do espaço V
13 uh = fem.Function(V)
14
15 # valor nodais
16 from numpy import sin, pi
17 for i,x in enumerate(domain.geometry.x):
18     uh.x.array[i] = sin(pi*x[0])*sin(pi*x[1])
19
20 # gráfico
21 u_topology, u_cell_types, u_geometry = plot.
    vtk_mesh(V)
22 u_grid = pyvista.UnstructuredGrid(u_topology,
    u_cell_types, u_geometry)
23 u_grid.point_data["u"] = uh.x.array.real
24 u_grid.set_active_scalars("u")
25 u_plotter = pyvista.Plotter()
26 u_plotter.add_mesh(u_grid, show_edges=True)
27 u_plotter.view_xy()
28 if not pyvista.OFF_SCREEN:
29     u_plotter.show()
30 else:
31     figure = u_plotter.screenshot("u.png")
```

2.1.4 Exercícios

Em construção

Respostas

2.2 Interpolação

Em revisão

Dada uma função contínua f em um triângulo K com nodos N_i , $i = 0, 1, 2$, sua interpolação linear $\pi f \in P_1(K)$ é definida por

$$\pi f = \sum_{i=0}^3 f(N_i)\varphi_i. \quad (2.10)$$

Logo, temos $\pi f(N_i) = f(N_i)$ para todo $i = 0, 1, 2$.

Exemplo 2.2.1. Consideramos a função

$$u(x_0, x_1) = \text{sen}(\pi x_0) \cos(\pi x_1) \quad (2.11)$$

defina no domínio $D = [0, 1]^2$. O seguinte código computa a interpolação de f no espaço de elementos finitos V_h sobre uma malha uniforme de 16×16 triângulos. Com ele, graficamos a função interpolada $u_h \in V_h$ e a função u . Consulte a Fig. 2.3.

Código 2.2: interp2d.py

```

1 from mpi4py import MPI
2 from dolfinx import mesh
3
4 # malha
5 domain = mesh.create_unit_square(MPI.COMM_WORLD,
6     16, 16)
7
8
9 from dolfinx import fem
10
11 # espaço de elementos finitos
12 V = fem.functionspace(domain, ("P", 1))
13
14 # função do espaço V
15 uh = fem.Function(V)
16

```

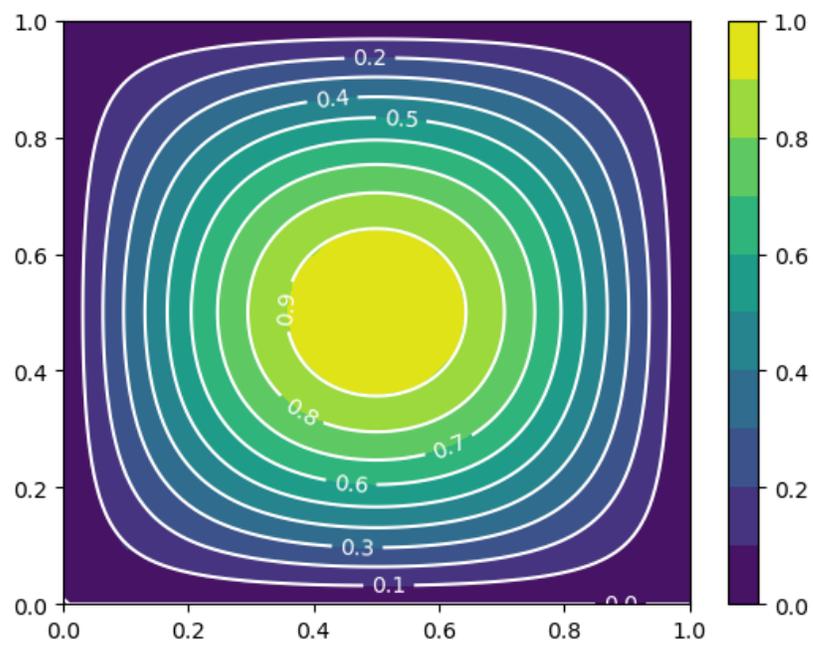


Figura 2.3: Gráfico de comparação função interpolada $u_h \in V_h$ (gráfico de contornos em cores) e da função original u (isolinhas) referentes ao Exemplo 2.2.1.

```
15 # interpolate
16 import numpy as np
17 def u(x, mod=np):
18     return mod.sin(mod.pi*x[0])*mod.sin(mod.pi*x
19     [1])
20 uh.interpolate(lambda x: u(x))
21
22 # eval fun
23 from dolfinx import geometry
24
25 def fun_eval(u, points,
26             domain=domain):
27     u_values = []
28     bb_tree = geometry.bb_tree(domain, domain.
29     topology.dim)
29     cells = []
30     points_on_proc = []
31     # Find cells whose bounding-box collide with the
32     # the points
33     cell_candidates = geometry.
34     compute_collisions_points(bb_tree,
35     points.T)
36     # Choose one of the cells that contains the
37     # point
38     colliding_cells = geometry.
39     compute_colliding_cells(domain,
40     cell_candidates,
41     points.T)
42     for i, point in enumerate(points.T):
43         if len(colliding_cells.links(i)) > 0:
44             points_on_proc.append(point)
45             cells.append(colliding_cells.links(i)[0])
46
47     points_on_proc = np.array(points_on_proc, dtype=
```

```
np.float64)
44 u_values = u.eval(points_on_proc, cells)
45 return u_values
46
47 # gráfico
48 import numpy as np
49 nx = ny = 101
50 xx0 = np.linspace(0., 1., nx)
51 xx1 = np.linspace(0., 1., ny)
52 X0, X1 = np.meshgrid(xx0, xx1, indexing='ij')
53 points = np.zeros((3, nx*ny))
54 points[0] = X0.reshape(-1)
55 points[1] = X1.reshape(-1)
56
57 yh = fun_eval(uh, points)
58 Yh = yh.reshape((nx,ny))
59
60 import matplotlib.pyplot as plt
61
62 fig = plt.figure()
63 ax = fig.add_subplot()
64 levels=10
65 cb = ax.contourf(X0, X1, Yh, levels = levels)
66 fig.colorbar(cb)
67 Y = u([X0, X1])
68 cl = ax.contour(X0, X1, Y, levels = levels, colors
    = 'w')
69 ax.clabel(cl)
70 plt.show()
```

Afim de determinarmos estimativas para o erro de interpolação, precisamos da chamada derivada total de primeira ordem

$$Df = \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_0} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.12)$$

e da derivada total de segunda ordem

$$D^2 f = \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.13)$$

Proposição 2.2.1. (Erro da interpolação no espaço linear.) A interpolação πf satisfaz as seguintes estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(K)} \leq Ch_K^2 \|D^2 f\|_{L^2(K)}, \quad (2.14)$$

$$\|D(f - \pi f)\|_{L^2(K)} \leq Ch_K \|D^2 f\|_{L^2(K)}. \quad (2.15)$$

Demonstração. Veja [1, Capítulo 4]. □

Observação 2.2.1. A constante C depende do inverso de $\sin(\theta_K)$ onde θ_K é o menor ângulo de K . Desta forma, para um triângulo com θ_K muito pequeno, as estimativas (2.14) e (2.15) perdem sentido. Este fato indica a necessidade de se trabalhar com malhas regulares.

A interpolação no espaço V_h de uma dada função f no domínio Ω é denotada também por $\pi f \in V_h$ e definida por

$$\pi f = \sum_{i=0}^{n_p-1} f(N_i) \varphi_i. \quad (2.16)$$

Proposição 2.2.2. (Erro da interpolação no espaço contínuo linear por partes.) O interpolador $\pi f \in V_h$ satisfaz as seguintes estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^4 \|D^2 f\|_{L^2(K)}^2, \quad (2.17)$$

$$\|D(f - \pi f)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^2 \|D^2 f\|_{L^2(K)}^2. \quad (2.18)$$

Demonstração. Demonstração análoga a Proposição 1.1.2. □

Observação 2.2.2. (Taxa de convergência.) A taxa de convergência (ou ordem de truncamento) do erro de interpolação é definida como a potência

do h na estimativa (2.17). Esta taxa pode ser computacionalmente estimada. De fato, o erro de interpolação para uma dada malha i tem a forma $\varepsilon_i \approx Ch_i^r$. Conhecendo $\varepsilon_{i-1} \approx Ch_{i-1}^r$ para uma outra malha $i-1$, podemos resolver para r , obtendo a estimativa

$$r \approx \frac{\ln \varepsilon_i / \varepsilon_{i-1}}{\ln h_i / h_{i-1}}. \quad (2.19)$$

Exemplo 2.2.2. Consideramos a interpolação feita no Exemplo 2.2.1. Aqui, computamos o erro de interpolação na norma L^2 , i.e.

$$\varepsilon = \|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.20)$$

para diferentes refinamentos de malha.

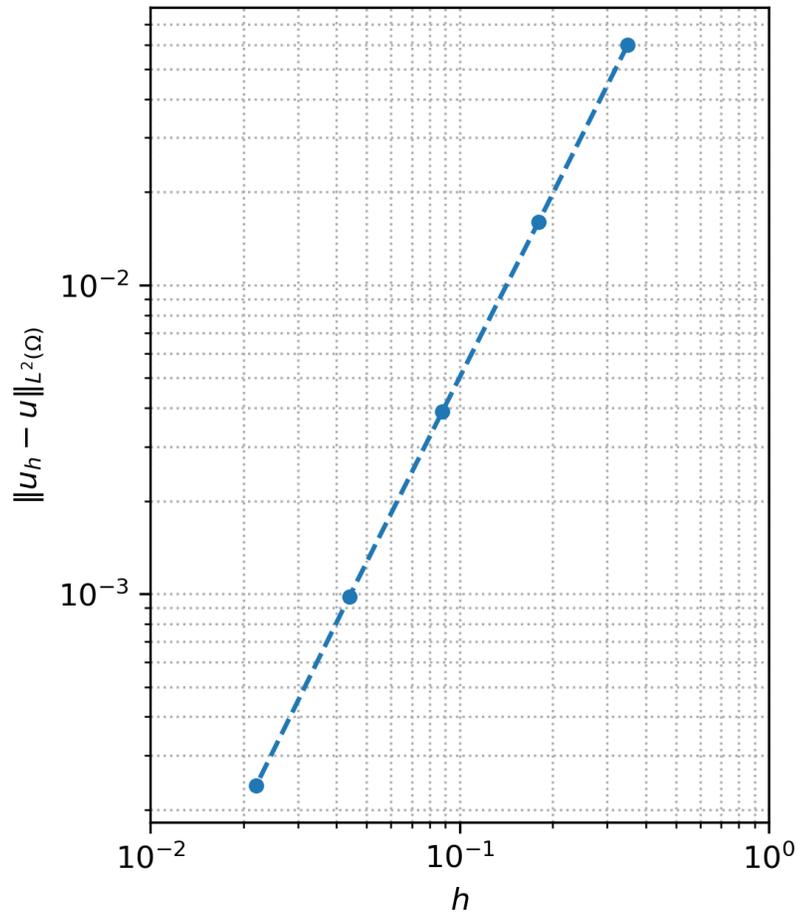


Figura 2.4: Tamanho da malha h versus erro de interpolação na norma L^2 referente ao Exemplo 2.2.2.

Na Tabela 2.1, temos o número de células e seu tamanho h , o erro de interpolação ε e a estimativa da taxa de convergência dada por (2.19).

Tabela 2.1: Erro de interpolação referente ao Exemplo 2.2.2.

#células	h	ϵ	r
4×4	3.5×10^{-1}	6.0×10^{-2}	-x-
8×8	1.8×10^{-1}	1.6×10^{-2}	1.91
16×16	8.8×10^{-2}	3.9×10^{-3}	2.04
32×32	4.4×10^{-2}	9.8×10^{-4}	1.99
64×64	2.2×10^{-2}	$2.4e \times 10^{-4}$	2.03

2.2.1 Exercícios

Em construção

2.3 Projeção

Em revisão

A **projeção** L^2 no espaço V_h de uma dada uma função $u \in L^2(\Omega)$ é **denotada por** $P_h u \in V_h$ e **definida por**

$$\int_{\Omega} (u - P_h u)v \, dx = 0, \quad \forall v \in V_h. \quad (2.21)$$

Analogamente a projeção em uma dimensão (consulte Subseção 1.1.2), a projeção é dada por

$$P_h u = \sum_{j=0}^{n_p-1} \xi_j \varphi_j, \quad (2.22)$$

com $\xi = (\xi_j)_{j=0}^{n_p-1}$ satisfazendo o sistema linear

$$M\xi = \mathbf{b}, \quad (2.23)$$

onde $M = [m_{i,j}]_{i,j=0}^{n_p-1}$ é a **matriz de massa** com

$$m_{i,j} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, dx \quad (2.24)$$

e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{n_p-1})$ é o **vetor de carga** com

$$b_i = \int_{\Omega} u \varphi_i dx. \quad (2.25)$$

Também, vale o resultado análogo da **melhor aproximação** (consulte Teorema 1.1.1), i.e.

$$\|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_h. \quad (2.26)$$

E, portanto, também temos a estimativa análoga para o **erro de projeção** (conduite Teorema 1.1.2)

$$\|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^4 \|D^2 u\|_{L^2(K)}^2. \quad (2.27)$$

Tomando o tamanho global da malha, temos

$$\|f - P_h f\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|D^2 f\|_{L^2(K)}. \quad (2.28)$$

Exemplo 2.3.1. Consideramos a função $u(x_0, x_1) = \text{sen}(\pi x_0) \cos(\pi x_1)$ definida no domínio $D = [0, 1] \times [0, 1]$. código computa a projeção de u no espaço V_h sobre uma malha triangular uniforme.

```

1 from mpi4py import MPI
2 from dolfinx import mesh
3
4 # malha
5 domain = mesh.create_unit_square(MPI.COMM_WORLD,
6     16, 16)
7
8
9 # espaço de elementos finitos
10 Vh = fem.functionspace(domain, ("P", 1))
11
12 # função do espaço V
13 uh = fem.Function(Vh)

```

```
14
15 # projeção
16 import ufl
17 from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
18 def uex(x, mod=ufl):
19     return mod.sin(mod.pi*x[0])*mod.sin(mod.pi*x
20     [1])
21 x = ufl.SpatialCoordinate(domain)
22 u = ufl.TrialFunction(Vh)
23 v = ufl.TestFunction(Vh)
24 a = ufl.dot(u,v)*ufl.dx
25 L = uex(x)*v*ufl.dx
26 problem = LinearProblem(a, L, bcs=[])
27 Phu = problem.solve()
28
29 # saída (paraview)
30 from dolfinx import io
31 from pathlib import Path
32 results_folder = Path("results")
33 results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
34 filename = results_folder / "phu"
35 Phu.name = "Phu"
36 with io.VTXWriter(domain.comm, filename.
37     with_suffix(".bp"), [Phu]) as vtx:
38     vtx.write(0.0)
39 with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix
40     (".xdmf"), "w") as xdmf:
41     xdmf.write_mesh(domain)
42     xdmf.write_function(Phu, 0.0)
```

2.3.1 Exercícios

Em revisão

E.2.3.1. Verifique computacionalmente a estimativa (2.28) no caso da função $f(x_0, x_1) = \sin(\pi x_0) \cos(\pi x_1)$ projetada sobre uma malha triangular uni-

forme sobre o domínio $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

2.4 Problema Modelo

Em revisão

Nesta seção, aplicamos do **método de elementos finitos para a equação de Poisson**⁷ com condições de Dirichlet⁸. Mais precisamente, definimos o chamado **problema forte**: encontrar u tal que

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega := [0, 1]^2, \quad (2.29)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.30)$$

onde $\Delta = \partial^2/\partial x_0^2 + \partial^2/\partial x_1^2$ é o operador de Laplace⁹ e f é uma função dada.

2.4.1 Formulação Fraca

Em revisão

A aplicação do método de elementos finitos é construída sobre a **formulação fraca** do problema (2.29)-(2.30). Para a obtermos, multiplicamos (2.29) por uma função teste v em um espaço adequado V_0 e integramos no domínio Ω , obtendo

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.31)$$

Então, no lado esquerdo, aplicamos a fórmula de Green¹⁰

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = -\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla u v \, ds. \quad (2.32)$$

donde temos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla u v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.33)$$

Então, observando critérios de regularidade e a condição de contorno (2.30), escolhemos o **espaço teste**

$$V_0 := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (2.34)$$

Lembramos que $H^1(\Omega) = \{v : \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} < \infty\}$.

Com isso, temos o seguinte **problema fraco associado** a (2.29)-(2.30): encontrar $u \in V_0$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad (2.35)$$

onde $a(u, v)$ é chamada de **forma bilinear** e definida por

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (2.36)$$

e $L(v)$ é chamada de **forma linear** e definida por

$$L(v) := \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.37)$$

2.4.2 Formulação de Elementos Finitos

Em revisão

A **formulação de elementos finitos** é obtida da formulação fraca (2.35) pela aproximação do espaço teste V_0 por um espaço de dimensão finita. Tomando uma triangulação $\mathcal{K} \subset \Omega$ e considerando o espaço contínuo dos polinômios lineares por partes

$$V_h := \{v : v \in C^0(\Omega), v|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}\}, \quad (2.38)$$

assumimos o espaço de elementos finitos

$$V_{h,0} := \{v \in V_h : v|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (2.39)$$

Com isso, temos o seguinte problema de elementos finitos associado (2.35): encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (2.40)$$

Observemos que (2.40) é equivalente ao problema de encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad (2.41)$$

com $i = 0, 1, \dots, n_p - 1$, onde $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n_i-1}$ é a base nodal de $V_{h,0}$ e n_i é o número de funções bases (igual ao número de nodos internos da triangulação \mathcal{K}). Ainda, como

$$u_h = \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j, \quad (2.42)$$

temos

$$a(u_h, \varphi_i) = a\left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j, \varphi_i\right) \quad (2.43)$$

$$= \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i). \quad (2.44)$$

Com isso, o problema de elementos finitos é equivalente a resolver o seguinte sistema linear

$$\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 0, 1, \dots, n_i - 1, \quad (2.45)$$

para as incógnitas ξ_j , $j = 0, 1, \dots, n_i - 1$. Ou, equivalentemente, temos sua forma matricial

$$A\xi = \mathbf{b}, \quad (2.46)$$

onde $A = [a_{i,j}]_{i,j=0}^{n_i-1}$ é chamada de **matriz de rigidez** com

$$a_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) \quad (2.47)$$

e $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{n_i-1})$ é o vetor de carga com

$$b_i = L(\varphi_i). \quad (2.48)$$

Exemplo 2.4.1. Consideremos o seguinte problema de Poisson

$$-\Delta u = 100x_0(1-x_0)x_1(1-x_1), \quad x \in \Omega := (0, 1) \times (0, 1), \quad (2.49)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.50)$$

Na Figura 2.5 temos um esboço da aproximação de elementos finitos obtida em uma malha uniforme com 20×20 nodos. As isolinhas correspondem aos pontos tais que $u = 3 \times 10^{-1}, 2 \times 10^{-1}, 10^{-1}, 5 \times 10^{-2}$.

Com o [FEniCS](#), podemos computar a solução deste problema com o seguinte código:

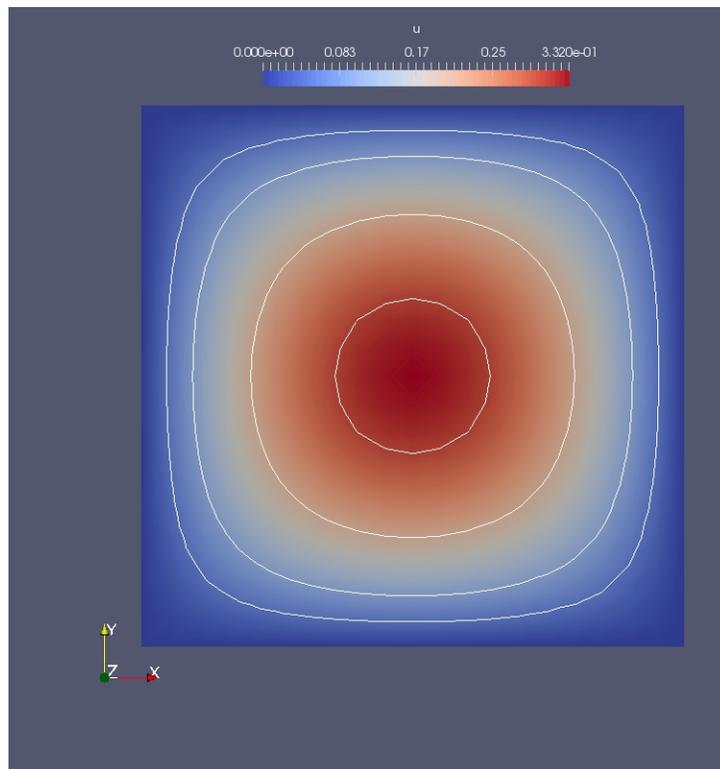


Figura 2.5: Esboço da solução de elementos finitos do problema discutido no Exemplo 2.4.1.

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
Nx = 20
Ny = 20
mesh = UnitSquareMesh(Nx, Ny)

# espaço
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
```

```

# cond. contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

# f
f = Expression('100*x[0]*(1-x[0])*x[1]*(1-x[1])',degree=4)

# MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
a = dot(grad(u), grad(v))*dx
L = f*v*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

# exportando em vtk
vtkfile = File('u.pvd')
vtkfile << u

```

2.4.3 Exercícios

Em revisão

E.2.4.1. Compute uma aproximação de elementos finitos para o seguinte problema

$$-\Delta u = 10, \quad x \in (0, 1) \times (0, 1) \quad (2.51)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.52)$$

$$u(1, y) = 0, \quad 0 \leq y < 1, \quad (2.53)$$

$$u(x, 1) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.54)$$

$$u(0, y) = 1, \quad 0 < x \leq 1. \quad (2.55)$$

2.5 Fundamentos da análise de elementos finitos

Em revisão

2.5.1 Existência e unicidade

Em revisão

Teorema 2.5.1. (Matriz positiva definida) A matriz de rigidez é positiva definida.

Demonstração. A matriz de rigidez $A = [a(\varphi_j, \varphi_i)]_{i,j=0}^{n_i-1}$ é obviamente simétrica. Além disso, para todo $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\boldsymbol{\xi} \neq 0$, temos

$$\boldsymbol{\xi}^T A \boldsymbol{\xi} = \sum_{i,j=0}^{n_i-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i) \xi_i \quad (2.56)$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n_i-1} \xi_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx \, \xi_i \quad (2.57)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j \right) \cdot \nabla \left(\sum_{i=0}^{n_i-1} \xi_i \varphi_i \right) \, dx \quad (2.58)$$

$$= \left\| \nabla \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.59)$$

Portanto, $\boldsymbol{\xi}^T A \boldsymbol{\xi} \geq 0$ e é nulo se, e somente se, $v = \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j$ for constante. Como $v \in V_{h,0}$, temos que v constante implica $v \equiv 0$, mas então $\boldsymbol{\xi} = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\boldsymbol{\xi}^T A \boldsymbol{\xi} > 0$ para todo $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\boldsymbol{\xi} \neq 0$. \square

Teorema 2.5.2. (Existência e unicidade) O problema de elementos finitos (2.40) tem solução única.

Demonstração. O problema de elementos finitos (2.40) se resume a resolver o sistema linear $A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}$. Do Teorema 2.5.1, temos que A é uma matriz definida positiva e, portanto, invertível. Daí segue, imediatamente, que o problema (2.40) tem solução única. \square

2.5.2 Estimativa *a priori* do erro

Em revisão

Teorema 2.5.3. (Ortogonalidade de Galerkin) A solução u_h do problema de elementos finitos (2.40) satisfaz

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_{h,0}, \quad (2.60)$$

onde u é a solução do problema fraco (2.35).

Demonstração. Segue, imediatamente, do fato de que $V_{h,0} \subset V_0$ e, portanto,

$$a(u, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h,0}, \quad (2.61)$$

bem como

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (2.62)$$

□

Definição 2.5.1. (Norma da energia.) Definimos a norma da energia por

$$\|v\| := \left(\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx \right)^{1/2} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.63)$$

para todo $v \in V_0$.

Teorema 2.5.4. (Melhor aproximação.) A solução u_h do problema de elementos finitos satisfaz

$$\|u - u_h\| \leq \|u - v_h\|, \quad \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (2.64)$$

Demonstração. Observando que $u - u_h = u - v_h + v_h - u_h$ e usando a ortogonalidade de Galerkin (Teorema 2.5.3), temos:

$$\|u - u_h\|^2 = \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - u_h) \, dx \quad (2.65)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - v_h) \, dx + \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(v_h - u_h) \, dx \quad (2.66)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - v_h) dx \quad (2.67)$$

$$= \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.68)$$

$$= \|u - u_h\|^2 \|u - v_h\|. \quad (2.69)$$

□

Teorema 2.5.5. (Estimativa *a priori* do erro.) A solução u_h do problema de elementos finitos (2.40) satisfaz

$$\|u - u_h\|^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^2 \|D^2 u\|_{L^2(K)}^2. \quad (2.70)$$

Demonstração. O resultado segue do Teorema da melhor aproximação (Teorema 2.5.4) e da estimativa do erro de interpolação (Proposição 2.2.2), pois

$$\|u - u_h\|^2 \leq \|u - \pi u\|^2 \quad (2.71)$$

$$= \|D(u - \pi u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.72)$$

$$\leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.73)$$

□

Para obtermos uma estimativa na norma $L^2(\Omega)$, podemos usar a desigualdade de Poincaré.

Teorema 2.5.6. (Desigualdade de Poincaré.) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado. Então, existe uma constante $C = C(\Omega)$, tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_0. \quad (2.74)$$

Demonstração. Se Ω tem contorno suficientemente suave, então existe ϕ tal que $-\Delta\phi = 1$ em Ω com $\sup_{x \in \Omega} |\nabla\phi| < C$. Com isso, temos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v^2 dx \quad (2.75)$$

$$= - \int_{\Omega} v^2 \Delta\phi dx. \quad (2.76)$$

Agora, usando o Teorema de Green e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = - \int_{\partial\Omega} v^2 n \cdot \nabla\phi \, ds + \int_{\Omega} \nabla v^2 \cdot \nabla\phi \, dx \quad (2.77)$$

$$= \int_{\Omega} 2v \nabla v \cdot \nabla\phi \, dx \quad (2.78)$$

$$\leq \sup_{x \in \Omega} |\nabla\phi| \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.79)$$

□

Com a desigualdade de Poincaré e da estimativa *a priori* do erro (Teorema 2.5.5), temos

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u - u_h\| \leq Ch \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.80)$$

onde $h = \max_{K \in \mathcal{K}} h_K$. Entretanto, esta estimativa pode ser melhorada.

Teorema 2.5.7. (Estimativa ótima *a priori* do erro.) A solução u_h do problema de elementos finitos (2.40) satisfaz

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.81)$$

Demonstração. Seja $e = u - u_h$ o erro e ϕ a solução do problema dual (ou problema adjunto)

$$-\Delta\phi = e, \quad \forall x \in \Omega \quad (2.82)$$

$$\phi = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (2.83)$$

Então, usando a fórmula de Green, a ortogonalidade de Galerkin e, então, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\|e^2\|_{L^2(\Omega)} = - \int_{\Omega} e \Delta\phi \, dx \quad (2.84)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla\phi \, dx - \int_{\partial\Omega} e n \cdot \nabla\phi \, ds \quad (2.85)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla(\phi - \pi\phi) \, dx \quad (2.86)$$

$$\leq \|\nabla e\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\phi - \pi\phi)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.87)$$

Da estimativa *a priori* (2.80) (que segue do Teorema 2.5.5) temos

$$\|\nabla e\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.88)$$

Agora, da regularidade elíptica $\|D^2\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)}$ [?] e da estimativa do erro de interpolação (Proposição 2.2.2), temos

$$\|\nabla(\phi - \pi\phi)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|D^2\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|e\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.89)$$

Então, temos

$$\|e\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}Ch\|e\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.90)$$

□

Exemplo 2.5.1. Consideremos o seguinte problema de Poisson

$$-\Delta u = -2(x_0^2 - x_0) - 2(x_1^2 - x_1), \quad x \in \Omega := (0, 1) \times (0, 1), \quad (2.91)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.92)$$

A solução analítica deste problema é $u(x) = (x_0^2 - x_0)(x_1^2 - x_1)$. Aqui, obtemos aproximações por elementos finitos u_h usando uma malha triangular uniforme $n \times n$ nodos, i.e. $h = 1/n$. A Tabela 2.2 mostra os valores dos erros $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ para diferentes valores de h .

Tabela 2.2: Erros de aproximações por elementos finitos referente ao problema dado no Exemplo 2.5.1.

#nodos	h	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$
10×10	$1e-1$	$9.29e-4$
20×20	$5e-2$	$2.34e-4$
100×100	$1e-3$	$9.40e-6$

Com o **FEniCS**, podemos computar a solução deste problema e o erro na norma L^2 com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# malha
Nx = 100
Ny = 100
mesh = UnitSquareMesh(Nx,Ny)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# cond. contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

# f
f = Expression('-2*(x[1]*x[1]-x[1])-2*(x[0]*x[0]-x[0])',degree=2)

# MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
a = dot(grad(u), grad(v))*dx
L = f*v*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

# sol. analitica
ua = Expression('x[0]*(x[0]-1)*x[1]*(x[1]-1)',degree=4)

# erro norma L2
erro_L2 = errornorm(ua, u, 'L2')
print("||u-u_h||_L2 = %1.2E\n" % erro_L2)

# exportando em vtk
vtkfile = File('u.pvd')
vtkfile << u
```

2.5.3 Estimativa *a posteriori*

Em revisão

Para obtermos uma estimativa *a posteriori* vamos precisar da chamada desigualdade do traço.

Teorema 2.5.8. (Desigualdade do traço) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ convexa e suave. Então, existe uma constante $C = C(\Omega)$, tal que para qualquer $v \in V$ temos

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.93)$$

Demonstração. Veja [?]. □

Teorema 2.5.9. (Estimativa *a posteriori*) A solução u_h do problema de elementos finitos (2.40) satisfaz

$$\| \|u - u_h\| \|^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} \eta_K^2(u_h), \quad (2.94)$$

onde o elemento residual $\eta_K(u_h)$ é definido por

$$\eta_K(u_h) = h_K \|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} h_K^{1/2} \|[n \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(\partial K \setminus \partial\Omega)}. \quad (2.95)$$

Aqui, $[n \cdot \nabla u_h]_K$ denota o salto na derivada normal de u_h nos lados interiores dos elementos de \mathcal{K} . Além disso, lembremos que $\Delta u_h = 0$.

Demonstração. Denotando $e := u - u_h$ o erro entre a solução do problema forte e a solução de elementos finitos, temos

$$\| \|e\| \|^2 = \|\nabla e\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.96)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla e \, dx \quad (2.97)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla(e - \pi e) \, dx. \quad (2.98)$$

Nesta última equação, temos usado a ortogonalidade de Galerkin (Teorema 2.5.3). Daí, temos

$$\int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla(e - \pi e) \, dx = \sum_{K \in \mathcal{K}} \int_K \nabla e \cdot \nabla(e - \pi e) \, dx \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{K \in \mathcal{K}} - \int_K \Delta e(e - \pi e) dx \\
 &+ \int_{\partial K} n \cdot \nabla e(e - \pi e) ds, \tag{2.100}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{K \in \mathcal{K}} \int_K (f + \Delta u_h)(e - \pi e) dx \\
 &+ \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} n \cdot \nabla e(e - \pi e) ds, \tag{2.101}
 \end{aligned}$$

uma vez que $-\Delta e|_K = f + \Delta u_h|_K$ e, ambos, e e πe se anulam em $\partial \Omega$.

Para computarmos o segundo termo do lado direito da ultima equação, observamos que o erro em lado E recebe contribuições dos dois elementos K^\pm que compartilham E . Com isso, temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial K^+ \cap \partial K^-} n \cdot \nabla e(e - \pi e) ds &= \int_E (n^+ \cdot \nabla e^+(e^+ - \pi e^+) \\
 &+ n^- \cdot \nabla e^-(e^- - \pi e^-)) ds, \tag{2.102}
 \end{aligned}$$

onde utilizamos a notação $v^\pm = v|_{K^\pm}$. Lembremos que o erro e é contínuo e, portanto, $(e^+ - \pi e^+)|_E = (e^- - \pi e^-)|_E$. Ainda, ∇u é contínuo, logo $(n^+ \cdot \nabla u^+ + n^- \cdot \nabla u^-)|_E = 0$. Entretanto, $\nabla u_h|_E$ não é geralmente contínuo, sendo apenas constante por partes. Assim sendo e denotando o salto $[n \cdot \nabla u_h] := (n^+ \cdot \nabla u_h^+ + n^- \cdot \nabla u_h^-)$, temos

$$\begin{aligned}
 \int_E (n^+ \cdot \nabla e^+(e - \pi e) + n^- \cdot \nabla e^-(e - \pi e)) ds \\
 = - \int_E [n \cdot \nabla u_h](e - \pi e) ds. \tag{2.103}
 \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\sum_{K \in \mathcal{K}} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} n \cdot \nabla e(e - \pi e) ds = - \sum_{E \in \mathcal{E}_I} \int_E [n \cdot \nabla u_h](e - \pi e) ds, \tag{2.104}$$

onde \mathcal{E}_I é o conjunto dos lados interiores na triangularização \mathcal{K} . Logo, retornando a (2.101), obtemos

$$\begin{aligned}
 |||e|||^2 &= \sum_{K \in \mathcal{K}} \int_K (f + \nabla u_h)(e - \pi e) dx \\
 &- \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \omega} [n \cdot \nabla u_h](e - \pi e) ds. \tag{2.105}
 \end{aligned}$$

Nos resta, agora, estimarmos estes dois termos do lado direito.

A estimativa do primeiro, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz seguida da estimativa padrão do erro de interpolação, i.e.

$$\int_K (f + \Delta u_h)(e - \pi e) dx \leq \|f + \delta u_h\|_{L^2(\Omega)} \|e - \pi e\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.106)$$

$$\leq \|f + \Delta u_h\|_{L^2(\Omega)} Ch_K \|De\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.107)$$

Para estimarmos as contribuições dos lados, usamos a desigualdade do Traço [?]

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(h_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)}^2 + h_K \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (2.108)$$

Com esta, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a estimativa padrão do erro de interpolação, temos

$$\int_{\partial K \setminus \partial \Omega} [n \cdot \nabla u_h](e - \pi e) ds \leq \|[n \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(\partial K)} \|e - \pi e\|_{L^2(\partial K)} \quad (2.109)$$

$$\leq \|[n \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(\partial K)} C \left(h_K^{-1} \|e - \pi e\|_{L^2(K)}^2 + h_K \|D(e - \pi e)\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \quad (2.110)$$

$$\leq \|[n \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(\partial K)} Ch_K^{1/2} \|De\|_{L^2(K)}. \quad (2.111)$$

Daí, a estimativa segue das (2.107) e (2.111). □

Bibliografia

- [1] Brenner, S.C.; Scott, L.R.. The mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer, 2008.
- [2] Evans, L.C.. Partial Differential Equations. 2. ed., AMS, 2010. ISBN: 978-0-8218-4974-3
- [3] Langtangen, H.P.; Logg, A.. Solving PDEs in Python. Springer, 2017. ISBN: 978-3-319-52461-0
- [4] Larson, M.G.; Bengson, F.. The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications. Springer, 2013.
- [5] Tveito, A.; Winther, R.. Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach. Springer, 1998. ISBN 978-0-387-22773-3. <https://doi-org.ez45.periodicos.capes.gov.br/10.1007/b98967>.